

N. 4.

LA RISONANZA IN CIRCUITI CONTENENTI FERRO

*Nota del socio ALBERTO DINA presentata alla Sezione di Palermo
nella riunione del 2 Maggio 1910.*

Premesse.

Nella trattazione della risonanza in un circuito a corrente alternativa contenente capacità ed autoinduzione, dopo aver considerato il caso che le perdite nel circuito sieno dovute solo a resistenza ohmica costante, si suole aggiungere che, quando si verificchino altre cause di dissipazione di energia, si può tener conto complessivamente di tutte le perdite, conglobandone l'effetto in quello corrispondente ad una opportuna resistenza fittizia (rapporto dell'energia dissipata al quadrato della corrente), il cui valore deve venire sostituito nelle formole finali a quello della resistenza ohmica.

Così però si viene ad ammettere implicitamente che anche tale resistenza fittizia sia indipendente dalla variazione delle grandezze del circuito; quando invece ciò non sia, si può prevedere che i risultati possano subire modificazioni più o meno notevoli a seconda delle leggi, che rilegano le perdite considerate alle grandezze variabili.

Ci limiteremo qui ad indagare l'effetto che sulla risonanza esercita l'isteresi magnetica del ferro contenuto nella bobina di autoinduzione, fenomeno che spesso dà luogo nel circuito alla perdita di maggiore entità, riguardo alla quale la perdita per correnti parassite è in generale trascurabile (ben s'intende, se il ferro è laminato), come pure, anzi ancor più, quella per isteresi dielettrica quando si tratti di buoni condensatori. Supporremo anche, allo scopo di mettere più facilmente e con maggiore chiarezza in evidenza l'influenza dell'isteresi magnetica sul fenomeno di risonanza, che la resistenza ohmica esistente in circuito si riduca alla resistenza contenuta nella bobina stessa di autoinduzione e nelle connessioni, e che questa sia così piccola da poterne trascurare l'effetto.

Ciò posto, troviamo un'espressione della resistenza fittizia ρ di isteresi in funzione di grandezze caratteristiche del circuito. Se E_1 è la tensione ai morsetti dell'autoinduzione, I la corrente e φ il suo ritardo rispetto a quella, si ha per definizione:

$$\rho = \frac{E_1 I \cos \varphi}{I^2}$$

o, sostituendo ad $\frac{E_1}{I}$ il suo valore $\sqrt{\rho^2 + \omega^2 L^2}$,

$$\rho = \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + \omega^2 L^2}$$

da cui, risolvendo l'equazione rispetto a ρ , risulta:

$$\rho = \omega L \operatorname{ctg} \varphi$$

Nella nostra ipotesi che tutta l'energia comunicata alla bobina vada perduta per isteresi, l'angolo φ , per un dato valore di ωL , dipende soltanto dalle proprietà isteretiche del ferro; ma ciò non si verifica più quando si considerino anche altre perdite, ad es. la ohmica. Affinchè nella formola compaia un angolo più intimamente connesso colle proprietà del ferro, introduciamo in essa l'angolo ε di ritardo della magnetizzazione, cioè l'angolo di ritardo del flusso rispetto alla corrente magnetizzante. Nel nostro caso il vettore della tensione è ortogonale a quello del flusso, sicchè ε riesce complementare di φ e

$$\rho = \omega L \operatorname{tg} \varepsilon$$

come si può anche dedurre direttamente dalla considerazione delle componenti attiva ρI ed in quadratura ωLI della tensione E_1 ai morsetti dell'autoinduzione.

La resistenza fittizia di isteresi dipende dunque dalla frequenza, dall'autoinduzione e dall'angolo di ritardo della magnetizzazione o di isteresi.

La frequenza si può con facilità variare a piacimento; l'autoinduzione, ad esempio, spostando il nucleo di ferro in un solenoide cilindrico, oppure modificando il numero N di spire inserite in circuito di un avvolgimento magnetizzante un anello di ferro.

Fermiamoci su quest'ultimo caso, magneticamente assai semplice, per dedurne alcune proprietà dell'angolo ε , limitandoci però a considerare l'intervallo in cui si può ritenere costante la permea-

bilità del ferro. In tale ipotesi sussistono le semplici relazioni di proporzionalità:

$$L \equiv N^2$$

$$B \equiv NI$$

Combinando queste relazioni coll'equazione precedente si deduce un'espressione proporzionale dell'energia dissipata per isteresi, e cioè:

$$\rho I^2 \equiv \omega B^2 \operatorname{tg} \varepsilon$$

A seconda dei risultati sperimentali la perdita di isteresi nell'unità di tempo cresce un po' più rapidamente della frequenza ed è approssimativamente proporzionale alla potenza 1,6 dell'induzione massima. Dal confronto di questi risultati dell'esperienza colla espressione precedente si deduce, come del resto è stato trovato per altre vie, che ε è funzione di ω (per quanto in misura ben poco sensibile) e di B ; e precisamente ε cresce lentamente colla frequenza e diminuisce coll'aumentare di B . (Ammettendo l'esattezza dell'esponente 1,6 di Steinmetz, e, come si è detto, costante permeabilità, risulterebbe $\operatorname{tg} \varepsilon \equiv \frac{1}{B^{0,4}}$)

Ad onta di ciò, per arrivare ad una trattazione semplice, riteremo qui che il ritardo angolare della magnetizzazione abbia per una data qualità di ferro un valore costante. Questa ipotesi del resto è comune nella trattazione matematica di problemi magnetici; al pari di quella della costanza della permeabilità, e conduce a risultati, se non quantitativamente esatti, di solito rispecchianti assai bene le linee generali dei fenomeni.

Capacità ed autoinduzione in serie.

Massimi della corrente. — Date queste premesse, costruiamo il diagramma delle tensioni per un circuito contenente capacità ed autoinduzione in serie.

Il vettore OA (Fig. 1), rappresentante la tensione data E che agisce agli estremi del circuito, è la somma geometrica di due vettori componenti: di $OB = E_1$, tensione ai morsetti dell'autoinduzione, che, per quanto abbiamo visto, precede la corrente di un angolo $\frac{\pi}{2}$ — ε ed è uguale a

$$I \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} = I \sqrt{\omega^2 L^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \omega^2 L^2} = \frac{\omega LI}{\cos \varepsilon}$$

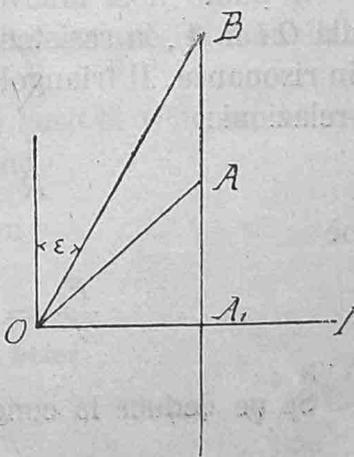


Fig. 1

e di $BA = E_c$, tensione ai morsetti del condensatore, in ritardo di un angolo retto rispetto alla corrente ed uguale a $\frac{I}{\omega C}$

Con un semplice cambiamento di scala la stessa figura si trasforma nel diagramma delle resistenze apparenti (r_l , r_c e R) delle singole parti e totale del circuito, quali risultano dalla divisione delle tensioni per la corrente. È sotto questo punto di vista che considereremo in appresso il diagramma, ritenendo dunque:

$$OB = \frac{\omega L}{\cos \varepsilon} = r_l$$

$$BA = \frac{I}{\omega C} = r_c$$

$$OA = \frac{\omega L}{\cos \varepsilon} + \frac{I}{\omega C} = \frac{E}{I} = R$$

Con tale interpretazione il segmento OA risulta variabile non solo in direzione (che coincide con quella di E), ma anche in grandezza (inversamente proporzionale ad I); e possiamo domandarci come esso vari e, in ispecial modo, quale sia il suo minimo, quando varia una qualunque delle tre grandezze che influiscono sul suo valore: capacità, autoinduzione e frequenza.

Se varia la capacità, poichè la resistenza di isteresi è indipendente da essa, ci troviamo in un caso del tutto analogo a quello considerato comunemente del circuito con resistenza ohmica costante, sicchè potremmo senz'altro trasportare ad esso i noti risultati. Solo per unità di metodo deduciamo qui direttamente le formole relative, battendo la stessa via, che seguiremo nei casi successivi.

Il punto A si muove sulla retta BA ; quando esso cade anche sulla OI in A , la resistenza totale passa per un minimo ed il circuito è in risonanza. Il triangolo rettangolo OBA_1 fornisce per questo caso le relazioni:

$$R = r_l \operatorname{sen} \varepsilon = r_c \operatorname{tg} \varepsilon$$

cioè

$$\frac{E}{I} = \frac{\omega L}{\cos \varepsilon} \operatorname{sen} \varepsilon = \frac{I}{\omega C} \operatorname{tg} \varepsilon$$

Se ne deduce la condizione di risonanza:

$$\omega^2 C L = 1$$

e il valore della corrente massima:

$$I = \frac{E}{\omega L \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{\omega C E}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

E poichè le tensioni componenti e risultante sono proporzionali alle resistenze apparenti relative, dalle uguaglianze fra le r risulta che allora

$$E_l = \frac{E}{\operatorname{sen} \varepsilon}, \quad E_c = \frac{E}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

Ma sia ora variabile l'autoinduzione: proporzionalmente ad essa varia il segmento OB , sicchè il segmento BA si muove parallelamente a sè stesso ed il punto A descrive una retta AA' parallela ad OB (fig. 2). La resistenza apparente totale passa per un minimo quando il punto A si trova in A_2 , piede della perpendicolare da O su AA' , che è inclinata dell'angolo ε rispetto ad OI ed è quindi diretta come il flusso.

Questo minimo è dunque diverso per grandezza e per fase dal minimo trovato precedentemente per il caso di capacità variabile. Se a prima vista tale risultato può sembrare strano, esso non deve tuttavia stupire, inquantochè non si tratta qui di minimi assoluti, sibbene di minimi nel senso del calcolo differenziale, cioè di valori di una data funzione di più variabili, che sono maggiori dei vicini, precedenti e susseguenti, essendo ciascuno ottenuto in corrispondenza alla variazione di una data variabile.

Le relazioni analitiche relative a questo caso ci vengono fornite dal triangolo OA_2B_2 , rettangolo in O , e sono

$$R = r_l \operatorname{tg} \varepsilon = r_c \operatorname{sen} \varepsilon$$

cioè

$$\frac{E}{I} = \frac{\omega L}{\operatorname{cos} \varepsilon} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{I}{\omega C} \operatorname{sen} \varepsilon$$

Se ne deduce la condizione di risonanza:

$$\omega^2 C L = \operatorname{cos}^2 \varepsilon$$

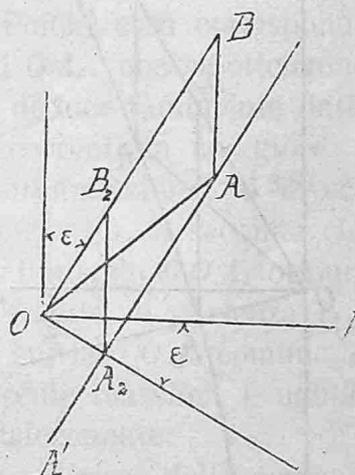


Fig. 2

la corrente massima :

$$I = \frac{E}{\omega L \operatorname{tg} \varepsilon} \cos \varepsilon = \frac{\omega CE}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

e le corrispondenti tensioni :

$$E_l = \frac{E}{\operatorname{tg} \varepsilon}, \quad E_c = \frac{E}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

La risonanza adunque ha ora luogo per un valore di $\omega^2 CL$ minore di 1 e la corrente relativa non è uguale ad $\frac{E}{\rho}$, sibbene a questo valore diminuito nel rapporto $\cos \varepsilon : 1$.

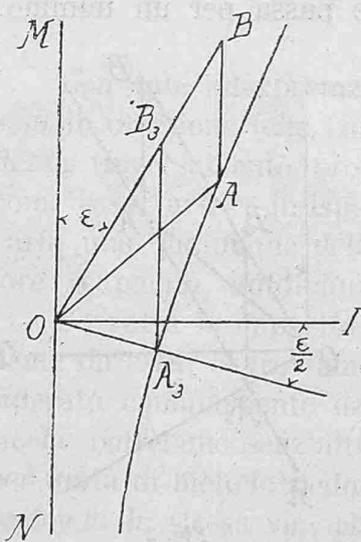


Fig. 3.

Infine supponiamo che venga variata la frequenza: OB varia in ragione direttamente proporzionale, e BA in ragione inversamente proporzionale ad essa. Ne viene che il loro prodotto rimane costante e che il punto A si muove quindi su un ramo di iperbole avente per asintoti OB ed ON (fig. 3).

Il segmento OA raggiunge il suo valore minimo, quando coincide con OA_3 , diretto secondo l'asse principale dell'iperbole, quindi ritardato dell'angolo $\frac{\varepsilon}{2}$ rispetto ad OI . Il triangolo corrispondente OAB_3 è isoscele e fornisce le relazioni :

$$R = 2 r_l \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} = 2 r_c \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= r_l \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} = r_c \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\frac{E}{I} = \frac{\omega L \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{\omega C} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{2}}$$

Da esse si deduce per la risonanza:

$$\omega^2 C L = \cos \varepsilon$$

$$I = \frac{E}{\omega L \operatorname{tg} \varepsilon} \cos \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\omega C E}{\operatorname{sen} \varepsilon} \cos \frac{\varepsilon}{2}$$

$$E_l = E_c = \frac{E}{\operatorname{sen} \varepsilon} \cos \frac{\varepsilon}{2}$$

In questo caso il prodotto $\omega^2 C L$ ha dunque un valore, che è medio geometrico fra quelli trovati nei due casi di risonanza precedenti, e la corrente massima precede la tensione impressa E di un angolo medio aritmetico fra gli angoli o ed ε , rispettivamente validi negli altri due casi per l'analogia differenza di fase.

Qual'è la più grande fra le tre correnti di risonanza, a cui si può arrivare per una data tensione, partendo sempre da una medesima terna iniziale di valori C , L ed ω ? Poichè essa corrisponde al più piccolo dei tre segmenti $O A_1$, $O A_2$ ed $O A_3$, che si ottengono in figura partendo da uno stesso punto A , si deduce facilmente dalle costruzioni grafiche indicate, che delle tre correnti la maggiore è quella corrispondente all'a variazione dell'autoinduzione od invece quella corrispondente alla variazione della capacità, a seconda che il punto iniziale A si trova rispettivamente nell'angolo $B O A_3$ oppure nell'angolo $A_3 O N$, cioè a seconda che nel circuito di partenza r_l è maggiore o minore di r_c . Se il punto A cade sul lato $O A_3$ comune ai due angoli (se inizialmente $r_l = r_c$), la corrente massima è uguale a ciascuna delle due correnti di risonanza suaccennate.

Uno stato del circuito, che presenti un massimo della corrente contemporaneamente per tutt'e tre le variabili (tale cioè che sia il differenziale totale

$$dI = \frac{\delta I}{\delta C} dC + \frac{\delta I}{\delta L} dL + \frac{\delta I}{\delta \omega} d\omega = 0$$

come si verifica in un circuito con resistenza costante per $\omega^2 C L = 1$), non può venire realizzato, come pure nemmeno per due variabili, inquantochè i punti A_1 , A_2 ed A_3 vengono a coincidere soltanto nel caso limite che ε sia zero.

Massimi delle tensioni componenti. — Proponiamoci di trovare i massimi delle due tensioni componenti E_l ed E_c .

E_l è uguale al prodotto $r_l I$; epperò, quando è variabile C , che non influisce su r_l , tale tensione componente raggiunge il suo valore massimo contemporaneamente alla corrente I , cioè per

$$\omega^2 C L = 1$$

Ma possiamo facilmente dimostrare che alla stessa condizione, coincidente colla condizione di massimo della corrente per capacità variabile, si arriva qualunque sia la variabile indipendente, cioè anche quando r_l ed I variano entrambe.

Difatti posto $r_l I$ sotto la forma $r \frac{E}{R}$, dal triangolo $O A B$ si deduce in ogni caso:

$$E_l = \frac{r_l}{R} E = \frac{\text{sen } O A B}{\text{sen } \varepsilon} E$$

Epperò il massimo di E_l ha luogo unitamente al massimo di $\text{sen } O A B$, cioè quando, qualunque sia la legge di deformazione del triangolo $O A B$, l'angolo $O A B$ risulti retto, cioè il punto A si trovi sulla $O I$; in questo caso fra le grandezze del circuito ha appunto luogo la relazione:

$$\omega^2 C L = 1$$

In corrispondenza la massima tensione ai morsetti dell'autoinduzione ha il valore:

$$(E_l)_m = \frac{E}{\text{sen } \varepsilon}$$

qualunque sia la grandezza assunta come variabile, ed il differenziale totale:

$$d E_l = \frac{\delta E_l}{\delta C} d C + \frac{\delta E_l}{\delta L} d L + \frac{\delta E_l}{\delta \omega} d \omega$$

riesce uguale a zero per tutti i circuiti rappresentati da punti della retta $O A_1$. La tensione massima, indipendente dai valori iniziali e di risonanza delle variabili del circuito, è individuata (per una data tensione E agli estremi del circuito) soltanto dall'angolo di ritardo d'isteresi, riuscendo tanto maggiore quanto minore è tale angolo.

Analogamente possiamo trovare condizione e valore per il massimo della tensione:

$$E_c = r_c I = \frac{r_c}{R} E$$

ai morsetti del condensatore, utilizzando la relazione fornita dallo stesso triangolo OAB :

$$E_c = \frac{r_c}{R} E = \frac{\text{sen } AOB}{\text{sen } \varepsilon} E$$

Quando OA forma l'angolo ε colla OI , essa riesce perpendicolare ad OB , sicchè $\text{sen } AOB$ diventa uguale all'unità, ed E_c raggiunge il valore massimo

$$(E_c)_m = \frac{E}{\text{sen } \varepsilon}$$

sul quale si possono fare osservazioni analoghe a quelle fatte riguardo $(E_c)_m$.

La condizione corrispondente fra le grandezze del circuito è quella relativa alla speciale posizione di OA , che abbiamo trovato essere

$$\omega^2 CL = \cos^2 \varepsilon$$

e corrispondere al massimo della corrente per autoinduzione variabile, come riesce chiaro a priori pel caso che questa sia la grandezza effettivamente assunta come variabile.

Entrambe le tensioni componenti raggiungono quindi l'uguale valore massimo, però per diversi valori del prodotto $\omega^2 CL$. Come abbiamo dedotto nel paragrafo precedente, esse risultano invece uguali fra loro ($= \frac{E}{\text{sen } \varepsilon} \cos \frac{\varepsilon}{2}$) quando è verificata la condizione:

$$\omega^2 CL = \cos \varepsilon$$

che corrisponde al massimo della corrente per frequenza variabile.

Massimi successivi della corrente. — A tenore di quanto abbiamo visto fin qui, ogni terna di valori C , L ed ω individua un punto A , pel quale passano una retta AA_1 , luogo degli estremi del vettore OA

quando si fa variare la capacità nel circuito iniziale, una retta OA_1 luogo dei punti corrispondenti alla variazione dell'autoinduzione, ed un ramo di iperbole OA_2 luogo dei punti corrispondenti alla variazione della frequenza. Su questi luoghi geometrici si distinguono punti di speciale importanza, il cui luogo geometrico si compone alla sua volta di tre rette caratteristiche (fig. 4): della retta OA_1 ,

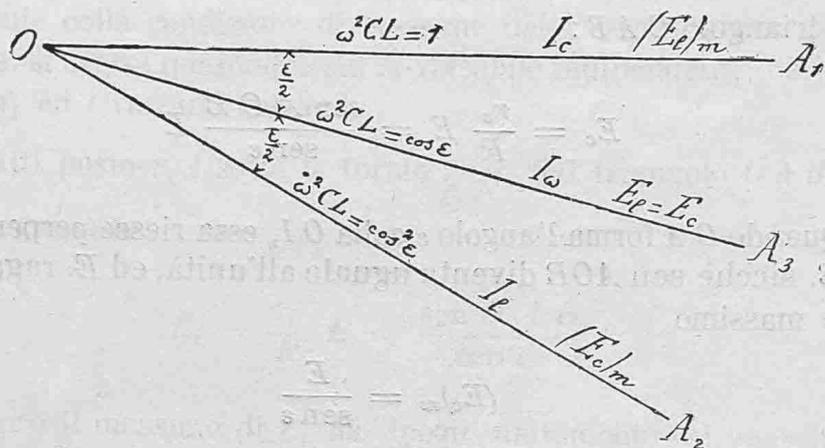


Fig. 4

coincidente con OI , per i punti della quale (o meglio, per gli stati corrispondenti del circuito) è soddisfatta la relazione $\omega^2 CL = 1$; della retta OA_2 ritardata rispetto alla prima dell'angolo ε , per i punti della quale vale la condizione $\omega^2 CL = \cos^2 \varepsilon$; ed infine della retta OA_3 , bisettrice dell'angolo A_1OA_2 formato dalle prime due, i cui punti sono caratterizzati dall'uguaglianza $\omega^2 CL = \cos \varepsilon$.

I punti della prima retta OA_1 corrispondono a circuiti, nei quali ha luogo un massimo della corrente, ottenuto mediante variazione della capacità, ed il massimo della tensione ai morsetti dell'autoinduzione (ottenuto mediante una variazione qualunque); i punti della seconda retta OA_2 caratterizzano circuiti, nei quali si verifica un massimo della corrente, ottenuto mediante variazione dell'autoinduzione, ed il massimo della tensione ai morsetti del condensatore; i punti della terza retta OA_3 rappresentano circuiti, nei quali ha luogo un massimo della corrente, ottenuto mediante variazione della frequenza, e l'uguaglianza delle tensioni componenti.

Successivi passaggi da un punto di una di queste tre rette ad un punto di un'altra presentano poco interesse per le tensioni, le quali hanno un valore massimo costante, mentre conducono a risultati interessanti per la corrente.

Quando si tratta di massimi della corrente, ad un punto di OA_1 o ad un punto di OA_2 si perviene sul diagramma mediante una per-

pendicolare alla retta considerata, ad un punto di $O A_3$ mediante un arco di iperbole, i cui asintoti sono inclinati rispetto alla retta stessa di angoli uguali a $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$

Così la fig. 5 illustra come mediante successive variazioni di L e di C si possa passare a successivi stati di risonanza, pei quali la resistenza apparente totale del circuito è rappresentata rispettivamente da $O P_1, O P_2, O P_3 \dots$ ecc.

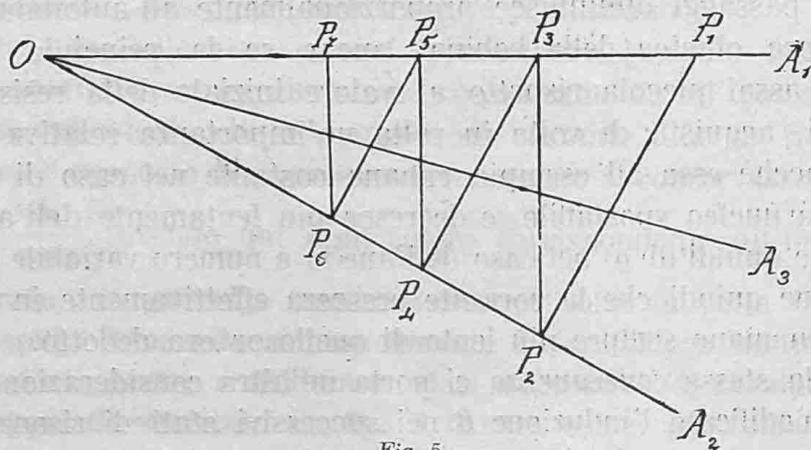


Fig. 5.

Nel fatto, per passare dal punto P_1 , caratterizzato dalla terna ω, C_1 ed L_1 tale che $\omega^2 C_1 L_1 = 1$, al punto P_2 , occorrerà diminuire l'autoinduzione dal valore L_1 all'altro $L_2 = L_1 \cos^2 \varepsilon$, per modo che dalla precedente uguaglianza si possa dedurre la relazione $\omega^2 C_1 L_2 = \cos^2 \varepsilon$.

Da P_2 si passerà a P_3 aumentando la capacità da C_1 al valore $C_3 = \frac{C_1}{\cos^2 \varepsilon}$, sicchè in base alla precedente uguaglianza resti verificata la nuova condizione di risonanza $\omega^2 C_3 L_2 = 1$; e così via. In una parola, si modificheranno alternativamente l'autoinduzione e la capacità, in tale misura che i successivi valori dell'autoinduzione decrescano in progressione geometrica di ragione $\cos^2 \varepsilon$ ed i successivi valori della capacità invece crescano in progressione geometrica di ragione $\frac{1}{\cos^2 \varepsilon}$.

Le resistenze totali, come appare subito dalla figura, diminuiscono in progressione geometrica di ragione $\cos \varepsilon$, e, se si confrontano fra loro soltanto quelle di indice pari o quelle di indice dispari (cioè risultanti da variazioni nell'autoinduzione od invece nella capacità), in progressione geometrica di ragione $\cos^2 \varepsilon$. A seconda dei

$L \varepsilon$

rapporti inversi cresceranno quindi le corrispondenti correnti di risonanza.

Naturalmente questo risultato rispecchia un caso teorico limite, in dipendenza delle ipotesi fatte; in verità i successivi valori della corrente si scosteranno sempre più dai valori previsti, e ciò per varie ragioni:

Innanzitutto noi abbiamo trascurato completamente la resistenza ohmica; ma poichè la resistenza fittizia di isteresi nei successivi passaggi diminuisce proporzionalmente all'autoinduzione, la resistenza ohmica della bobina, anche se da principio effettivamente assai piccola rispetto al valore iniziale della resistenza di isteresi, acquista di volta in volta un'importanza relativa maggiore; giacchè essa ad esempio rimane costante nel caso di un solenoide a nucleo spostabile, e decresce più lentamente dell'autoinduzione (e quindi di ϱ) nel caso dell'anello a numero variabile di spire. Ne viene quindi che la corrente crescerà effettivamente in modo di mano in mano sempre più lento di quello ora dedotto.

Alla stessa conseguenza ci porta un'altra considerazione. Come viene modificata l'induzione B nei successivi stati di risonanza?

Se, per rispondere a questa domanda, ci riferiamo al caso semplice dell'anello con un numero variabile N di spire magnetizzanti, dalle già accennate relazioni di proporzionalità (valide per permeabilità costante):

$$L \equiv N^2$$

$$B \equiv N I$$

possiamo dedurre l'altra:

$$B \equiv I \sqrt{L}$$

Negli stati di risonanza, caratterizzati rispettivamente dai punti P_1 e P_2 , l'induzione avrà quindi due valori B_1 e B_2 tali che:

$$B_1 : B_2 = I_1 \sqrt{L_1} : I_2 \sqrt{L_2} = I_1 \sqrt{L_1} : \frac{I_1}{\cos \varepsilon} \sqrt{L_1} \cos^2 \varepsilon = 1 : 1$$

cioè B_2 sarà uguale a B_1 .

Passando invece da P_2 mediante variazione di capacità allo stato di risonanza caratterizzato da P_3 , l'autoinduzione L_2 rimane costante, sicchè

$$B_2 : B_3 = I_2 \sqrt{L_2} : I_3 \sqrt{L_2} = I_2 \sqrt{L_2} : \frac{I_2}{\cos \varepsilon} \sqrt{L_2} = 1 : \frac{1}{\cos \varepsilon}$$

cioè l'induzione cresce nel rapporto di 1 a $\frac{1}{\cos \varepsilon}$; sicchè nel complesso dei successivi passaggi l'induzione va aumentando.

A seconda delle osservazioni preliminari l'angolo ε dovrebbe quindi in corrispondenza diminuire, contrariamente all'ipotesi, messa a base dei calcoli, che tale angolo sia costante. Che se, pur diminuendo ε , il rapporto di due correnti successive si conservasse ancora di 1 a $\frac{1}{\cos \varepsilon}$ (avendo qui ε un valore corrispondente all'intervallo considerato), la corrente aumenterebbe di volta in volta in modo meno rapido, tendendo asintoticamente ad un valore limite finito.

Possiamo anche considerare stati successivi di risonanza per altre coppie di variabili. La fig. 6 mostra come, partendo da uno

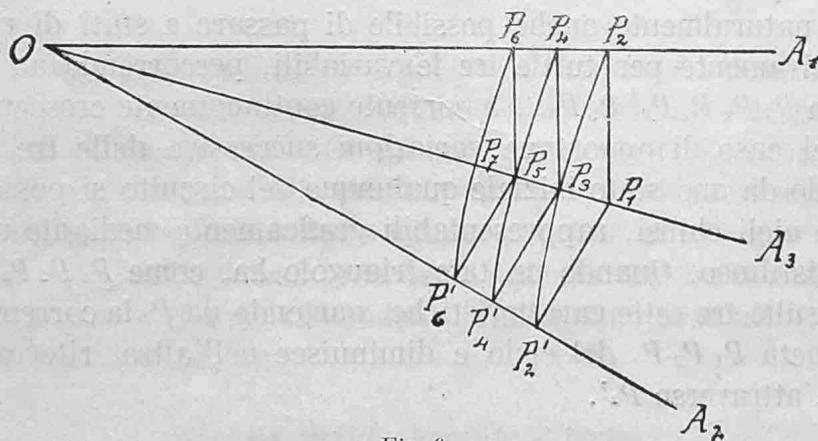


Fig. 6.

stato P_1 di risonanza per frequenza variabile, modificando alternativamente capacità e frequenza (ed in figura mediante segmenti rettilinei ed archi di iperbole contenuti nell'angolo superiore $A_1 O A_3$), si possa ridurre la resistenza totale successivamente da OP_1 a OP_2 , OP_3 , OP_4 ... ecc.

Così pure, modificando alternativamente autoinduzione e frequenza, si riduce la resistenza totale da OP_1 a OP_2' , OP_3 , OP_4' ... ecc.; ed è interessante notare come ad uguali valori per la resistenza totale, e quindi ad uguali valori effettivi per la corrente, si pervenga

sia ch  alternativamente colla frequenza si modifichi la capacit  oppure l'autoinduzione; diversa nei due casi risulta soltanto la differenza di fase fra la corrente e la tensione impressa E .

Sarebbe facile anche qui di trovare le leggi numeriche secondo le quali variano le grandezze assunte come variabili e la corrente, nonch  discutere i risultati; ma, poich  il metodo   analogo a quello seguito nel caso precedente, ci basti osservare che la diminuzione della resistenza totale   per questi ultimi due casi molto meno rapida che non pel primo considerato, come dimostra senz'altro la costruzione grafica.

Volendo quindi mettere sperimentalmente in evidenza il fenomeno del successivo aumento della corrente di risonanza, converr  scegliere come coppia di variabili l'autoinduzione e la capacit , adoperando anche un nucleo di ferro pel quale l'angolo di ritardo di isteresi presenti un valore relativamente elevato. Ad ogni modo, per le osservazioni precedentemente fatte, l'accordo della teoria colla esperienza   da aspettarsi, pi  che nei risultati quantitativi, nell'andamento generale del fenomeno; e ci  del resto non solo per quanto riguarda l'aumento della corrente, ma ben anche per tutte le altre propriet  e formole trovate.

  naturalmente anche possibile di passare a stati di risonanza successivamente per tutt'e tre le variabili, percorrendo ad esempio la linea $P_1 P_2 P_3 P_4' P_5 P_6 \dots$ a corrente continuamente crescente.

Nel caso di opportune variazioni successive delle tre variabili partendo da uno stato iniziale qualunque del circuito si possono percorrere cicli chiusi, rappresentabili graficamente mediante un triangolo mistilineo. Quando un tale triangolo ha, come $P_1 P_2 P_3 P_2' P_1$, i vertici sulle tre rette caratteristiche, partendo da P_1 la corrente cresce nella met  $P_1 P_2 P_3$ del ciclo e diminuisce nell'altra, ritornando da P_3 a P_1 attraverso P_2' .

Capacit  ed autoinduzione in parallelo.

Consideriamo per ultimo il caso in cui il circuito   formato da capacit  ed autoinduzione in parallelo.

Allo stesso modo che, nel caso in cui queste grandezze sono in serie, la tensione agente agli estremi del circuito   la somma geometrica delle singole tensioni ai morsetti dell'autoinduzione e della capacit , cos  nel caso attuale la corrente esterna   la somma geometrica delle correnti che circolano in ciascun ramo. Gli angoli di fase, che si rife-

rivano prima alla corrente comune, si riferiscono ora alla tensione comune ai nodi, e, per le diverse correnti, sono gli stessi di quelli, che nel caso precedente avevano luogo per le corrispondenti tensioni, salvochè le precessioni si mutano in ritardi e viceversa.

Potremo quindi trasportare il diagramma delle tensioni istituito nella fig. 4 al caso attuale, purchè si dia il significato di correnti ai segmenti rappresentanti tensioni e viceversa, e si inverta il senso di rotazione dei vettori. Analogamente potremo tradurre lo stesso diagramma, riferito precedentemente alle resistenze r , in un diagramma riferito alle conduttibilità f , ritenendo ora:

$$OB = f_l = \frac{1}{r_l} = \frac{\cos \varepsilon}{\omega L}$$

$$BA = f_c = \frac{1}{r_c} = \omega C$$

$$OA = F = \frac{1}{R} = \frac{I}{E} = \frac{\cos \varepsilon}{\omega L} + \omega C$$

Ciò posto, ogni minimo di OA corrisponde ad un minimo della conduttibilità apparente totale e quindi della corrente esterna. Graficamente si ottengono ancora i minimi OA_1, OA_2, OA_3 ; i loro valori in funzione degli elementi del circuito nonchè le relative condizioni di minimo si possono dedurre dalla figura, o, anche più semplicemente, dalle equazioni, che nel caso precedente sussistevano fra le resistenze, sostituendo alle r le f corrispondenti. Indichiamo senz'altro i risultati nella seguente tabella:

Minimi della corrente esterna

VARIABILE	CAPACITÀ	FREQUENZA	AUTOINDUZ.
Condizione	$\omega^2 CL = \cos^2 \varepsilon$	$\omega^2 CL = \cos \varepsilon$	$\omega^2 CL = 1$
Valore	$I = \frac{E \operatorname{sen} \varepsilon}{\omega L \cos \varepsilon}$ $= \omega CE \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon}$	$I = \frac{E \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon}{\omega L \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}$ $= \omega CE \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{2}}$	$I = \frac{E \operatorname{sen} \varepsilon}{\omega L}$ $= \omega CE \operatorname{sen} \varepsilon$

Notiamo che le condizioni di risonanza per la corrente, che prima vigevano per capacità ed autoinduzione variabile, ora valgono invece rispettivamente per autoinduzione e capacità variabile; è la stessa in entrambi i casi la condizione di risonanza per frequenza variabile.

In quanto alle correnti componenti, interessa non già il loro massimo (perchè ciascuna corrente, col diminuire la resistenza del ramo corrispondente, può farsi grande a piacere), sibbene il massimo dei loro rapporti alla corrente esterna: $\frac{I_l}{I}$ e $\frac{I_c}{I}$

In modo analogo a quello usato nel caso precedente per le tensioni componenti, è facile trovare che questi due massimi hanno entrambi il valore $\frac{1}{\text{sen } \varepsilon}$, che viene raggiunto

$$\text{da } \frac{I_l}{I} \text{ quando } \omega^2 C L = \cos^2 \varepsilon$$

$$\text{e da } \frac{I_c}{I} \text{ quando } \omega^2 C L = 1$$

e ciò qualunque sia la grandezza assunta come variabile.

Ciascuno di questi massimi ha luogo quindi per lo stesso valore del prodotto $\omega^2 C L$, che caratterizza i minimi della corrente esterna, ottenuti per variazione della grandezza contenuta nell'altro ramo del circuito.

I due rapporti risultano uguali fra loro (ed uguali a $\frac{\cos \frac{\varepsilon}{2}}{\text{sen } \varepsilon}$) quando sia

$$\omega^2 C L = \cos \varepsilon$$

Infine, ed ancora analogamente al caso di circuiti con capacità ed autoinduzione in serie, si possono considerare successivi stati di risonanza per diverse variabili, nei quali diminuisce sempre più la conduttibilità totale e con essa la corrente esterna.