N. 5.

SULL'USO DEL WATTMETRO DINAMOMETRICO A FREQUENZE ELEVATE

Comunicazione del Socio Alberto Dina, *presentata alla Sezione di Palermo nella riunione del 18 aprile 1912*

Se si usa un wattmetro dinamometrico ben costruito in un circuito a corrente alternativa, l'unica correzione da apportare all'indicazione dell'istrumento, per dedurne con esattezza il valore della potenza fornita da una sorgente o consumata in un apparecchio, è quella corrispondente alla potenza dissipata, a seconda delle connessioni, nell'una o nell'altra delle sue bobine.

Crescendo la frequenza, possono però rendersi sensibili anche altri errori, fra cui i principali sono quelli dipendenti dall'autoinduzione della bobina mobile, dalla mutua induzione fra le due bobine e dalle correnti parassite.

Queste ultime esercitano un'azione deviatrice sulla bobina mobile, la cui valutazione si sottrae al calcolo. Ma esse possono venire evitate od almeno diminuite in misura tale da renderle innocue, anche a frequenze notevolmente superiori alle normali, mediante la riduzione al minimo possibile dei sostegni metallici e la suddivisione del rame della bobina fissa.

Ci limiteremo quindi alla considerazione degli errori, che l'autoinduzione della bobina mobile e la sua mutua induzione colla fissa possono provocare in misure wattmetriche a frequenze elevate, riferendoci ad un istrumento ideale completamente esente da correnti parassite, o ad un istrumento reale, che, essendo costruito colle parti metalliche sufficientemente suddivise, goda praticamente di tale proprietà fino ad un opportuno limite della frequenza.

Nella teoria ordinaria del wattmetro si considera soltanto l'errore dovuto all'autoinduzione della bobina mobile, e si mostra che a frequenze usuali basta un facile espediente per renderlo trascurabile. Dell'induzione mutua non vi è da tener conto pei tipi di wattmetro a riduzione a zero, venendo in questi la bobina mobile ricondotta sempre nella posizione iniziale, ortogonale alla bobina fissa. Ma oggidì il tipo di wattmetro generalmente usato è quello a lettura diretta, nel quale la bobina mobile assume una posizione variabile da misura a misura. In un simile wattmetro l'influenza della mutua induzione è del tutto trascurabile a frequenze usuali, ma la coppia di rotazione corrispondente cresce, come vedremo, col quadrato della frequenza.

Naturalmente l'importanza dei due errori dipende, oltre che dalla frequenza e dalle altre condizioni della misura, dai valori dei coefficienti di auto e di mutua induzione, i quali sono andati di mano in mano diminuendo nelle costruzioni, sempre più perfezionate, dei wattmetri di precisione. Se ciò ha esteso il campo delle frequenze, per le quali gli errori considerati riescono il più delle volte trascurabili, questi riappaiono però a frequenze maggiori.

In quanto segue ci riferiremo ad un wattmetro a lettura diretta col circuito voltmetrico più semplice, che consta cioè, come suppone la teoria ordinaria, soltanto della bobina mobile e della resistenza in serie, e precisamente, per fissare le idee, ad un wattmetro Siemens di questo tipo. (*)

***

Chiamiamo:

E il valore effettivo della tensione impressa, che supporremo in questo capitolo di forma sinusoidale,

I il valore effettivo della corrente nel circuito esterno di resistenza ϱ e di coefficiente di autoinduzione λ,

$\varphi = \text{arc}\ tg \dfrac{\omega \lambda}{\varrho}$ lo sfasamento fra tensione e corrente esterna,

L il coefficiente di autoinduzione della bobina mobile del wattmetro,

$M = f(\alpha)$ il coefficiente di mutua induzione fra le due bobine, di valore variabile colla deviazione α,

r la resistenza complessiva della derivazione voltmetrica del wattmetro,

$\varepsilon = \text{arc}\ tg \dfrac{\omega L}{r}$,

$\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ la frequenza.

Riguardo ad M osserviamo, che nei wattmetri Siemens con un'opportuna costruzione della bobina fissa si ottiene che il campo, in cui si muove la bobina voltmetrica, abbia una distribuzione radiale; epperò, se il coefficiente di m. i. ha il valore M_0 quando la bobina mobile è nella posizione di riposo, che forma l'angolo di 45° colla bobina fissa, esso acquista il valore $M_0 \dfrac{90^0 - 2\theta}{90^0}$ quando la prima forma l'angolo $\overset{45^\circ +}{\Theta}$ colla seconda, sicchè M varia linearmente con Θ e quindi colla lettura α. Dall'espressione di M risulta inoltre che, se esso è positivo per Θ compreso fra 0° e 45°, deve venir ritenuto negativo per

---

(*) In un tipo recente di wattmetro, quello a compensazione di temperatura, il circuito voltmetrico è più complicato. (In serie alla bobina mobile è inserita una resistenza di manganina, in parallelo al loro complesso una resistenza pure di manganina; una resistenza in serie a questo gruppo porta il valore totale della resistenza del circuito voltmetrico nell'interno dell'istrumento a 1000 Ohm).

Θ compreso fra 45° e 90°. (Il flusso concatenato colla bobina mobile l'attraversa nei due casi penetrando per l'una o per l'altra delle sue facce). Ne consegue che la f. e. m. di m. i. ha direzioni opposte per posizioni della bobina mobile, che corrispondono alle due metà della scala.

Della tensione impressa E una componente, in quadratura con I, neutralizza la f. e. m. di m. i., mentre la rimanente genera la corrente che scorre nella bobina mobile, la quale si può quindi riguardare come la risultante delle correnti, che genererebbero separatamente la tensione impressa E e la f. e. m. di m. i. $\omega M I$, agendo agli estremi della derivazione voltmetrica. Il valore effettivo della prima è $i = \frac{E \cos \varepsilon}{r}$, quello della seconda $i' = \frac{\omega MI \cos \varepsilon}{r}$; entrambe sono in ritardo di ε rispetto alla tensione corrispondente, e quindi rispetto ad I la prima risulta sfasata dell'angolo φ-ε, la seconda (per M positivo) dell'angolo 90° + ε.

Esse, reagendo sul campo generato dalla I, danno luogo a coppie di rotazione, che in valore assoluto sono rispettivamente proporzionali a $I\, i \cos(\varphi\text{-}\varepsilon)$ e a $I\, i'$ sen ε. Mediante connessioni opportune (cioè invertendo al caso il senso di una delle correnti I ed i) si fa sempre in modo che la prima coppia risulti ripulsiva, cioè dia luogo a una deviazione positiva. La seconda coppia invece può riuscire repulsiva od attrattiva in dipendenza della posizione della bobina mobile; ed invero, a seconda che M è positivo o negativo, la i' scorre nella bobina voltmetrica in un senso o nel senso opposto, sicchè la coppia risulta nei due casi di segno contrario. Essa tenderebbe sempre, se non vi fosse un momento antagonista, a disporre la bobina mobile nella posizione ortogonale alla bobina fissa, dove la coppia si annulla, epperò per effetto della m. i. la deviazione viene aumentata nella prima metà della scala, diminuita nella seconda.

Se K è un'opportuna costante dell'istrumento, possiamo quindi scrivere in generale:

$$K\,a = I\,\frac{E \cos \varepsilon}{r} \cos(\varphi - \varepsilon) + I\,\frac{\omega\, MI \cos \varepsilon}{r} \operatorname{sen} \varepsilon\,,$$

dove M è positivo o negativo a seconda della regione della scala in cui si trova l'indice.

Moltiplicando per r, e mettendo in evidenza l'espressione $W = E\,I \cos \varphi$ della potenza, risulta:

$$K\,r\,a = E\,I \cos \varphi \left(\frac{\cos \varepsilon \cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos \varphi} + \frac{\omega\, M\, I}{E}\, \frac{\cos \varepsilon \operatorname{sen} \varepsilon}{\cos \varphi} \right)$$

o, dopo alcune trasformazioni trigonometriche,

$$K\,r\,a = W \cos^2 \varepsilon \left(1 + tg\, \varphi\, tg\, \varepsilon + \frac{\omega\, M I}{E \cos \varphi}\, tg\, \varepsilon\right)$$

da cui:

$$W = K r a \frac{1 + tg^2 \varepsilon}{1 + tg \varepsilon \left(tg \varphi + \dfrac{\omega M I}{E \cos \varphi} \right)} \tag{1}$$

formola, che per $M = o$ coincide con quella generalmente nota.

Poichè $\dfrac{E \cos \varphi}{I}$ è uguale alla resistenza ϱ del circuito esterno e $tg \varphi = \dfrac{\omega \lambda}{\varrho}$ si può anche scrivere:

$$W = K r a \frac{1 + tg^2 \varepsilon}{1 + \dfrac{\omega (\lambda + M)}{\varrho} tg \varepsilon}$$

L'azione della mutua induzione si esplica quindi, come se il coefficiente di autoinduzione del circuito esterno venisse, a seconda del segno di M, aumentato o diminuito del coefficiente di mutua induzione fra le bobine.

Le denominazioni di errore per a. i. e di errore per m. i. sono improprie giacchè, come mostra la formola, entrambi dipendono in ugual modo dall'autoinduzione della bobina mobile: il primo in concomitanza all'autoinduzione del circuito esterno, il secondo in concomitanza alla mutua induzione fra le bobine dell'istrumento.

Per applicare praticamente la formola (1), si deve mediante misure preliminari determinare innanzitutto $tg \varepsilon$ e $M = f(a)$. Per ogni misura poi, non essendo conosciuto a priori l'angolo φ, si ricava un primo valore approssimato del suo coseno dai valori della tensione, della corrente e della potenza espressa semplicemente da Kra; introducendo questo valore di $\cos \varphi$ e la corrispondente $tg \varphi$ nella formola, si ottiene per la potenza un valore più vicino al vero, dopodichè si continua con analogo andamento a successive approssimazioni.

Questo procedimento però è lungo e seccante, sopratutto se lo sfasamento φ è notevole, sicchè sarebbe praticamente interessante di poterlo semplificare.

A frequenza normale la cosa è notoriamente facile, potendosi rendere il fattore di correzione, salvo una differenza di nessun conto, uguale all'unità, semplicemente collo scegliere la resistenza ohmica del circuito derivato molto grande rispetto alla sua resistenza induttiva, cioè facendo piccolissima $tg \varepsilon$. Questo ripiego però, pur attenuando gli errori, riesce insufficiente a frequenze notevolmente più elevate delle normali (e persino a frequenze usuali per valori molto grandi di $tg \varphi$), a meno di ridurre eccessivamente la sensibilità delle misure in corrispondenza ad un aumento rilevante della resistenza r.

A frequenze elevate si deve quindi ricorrere ad altri espedienti, pur mantenendo nella derivazione voltmetrica la stessa resistenza come per frequenze ordinarie, avendo essa altresì l'ufficio di limitare la corrente al valore lecito per l'avvolgimento della bobina mobile. Si noti che, dovendo la resistenza aumentare col valore della tensione, $tg\,\varepsilon$ è tanto più grande, e quindi il fattore di correzione, a parità delle altre circostanze, tanto più diverso dall'unità, quanto più bassa è la tensione.

L'idea, che si presenta più spontanea, è quella di inserire in serie nel circuito derivato una capacità $C = \frac{1}{\omega^2 L}$, in modo da annullare $tg\,\varepsilon$. Anche a prescindere dalla formola è chiaro, che in una tale condizione di risonanza non solo resta neutralizzato l'effetto dell'autoinduzione, ma viene nello stesso tempo annullata l'influenza dell'induzione mutua; di fatti la componente della corrente voltmetrica, che corrisponde alla f. e. m. di m. i., riuscendo allora come questa in quadratura colla corrente della bobina fissa, non può dar luogo ad un momento di rotazione. Questo metodo è stato recentemente proposto da *Behne,* che l'ha applicato a misure alla frequenza di 500 $\frac{\text{per.}}{\text{sec.}}$ con un wattmetro del tipo speciale a compensazione di temperatura. (*)

L'espediente accennato, se per tensioni sinusoidali risolve completamente la questione dal punto di vista teorico, può tuttavia incontrare delle difficoltà nella sua applicazione pratica.

Ed invero, poichè si può ritenere che nelle diverse costruzioni di precisione L abbia un valore compreso fra 0,01 e 0,005 Henry, la capacità necessaria ad es. per una frequenza di 500 $\frac{\text{per.}}{\text{sec.}}$ sarebbe compresa fra circa 10 e 20 microfarad, a 1000 $\frac{\text{per.}}{\text{sec.}}$ fra circa 2,5 e 5 mf. e così via. Occorrono quindi spesso condensatori di capacità rilevante, con molte suddivisioni (per essere adattabili con esattezza alle varie frequenze), e di ottima qualità (cioè a mica e non a carta), affinchè essi, presentando perdite trascurabili anche a frequenze elevate, non vengano ad introdurre nel circuito una resistenza fittizia, che alteri in modo difficilmente valutabile il valore della resistenza nel circuito derivato; in una parola i condensatori necessari riescono molto costosi.

Si potrebbe pensare di diminuire, quando sia opportuno, la capacità richiesta, inserendo anche un'autoinduzione addizionale L' in serie; ma il ripiego è pericoloso, perchè, per un dato divario percentuale $dC = \frac{p}{100} C$ oppure $d\omega = \frac{p}{100}\omega$ dal valore C od ω corrispondente alla condizione di risonanza:

$$L + L' - \frac{1}{\omega^2 C} = o$$

, l'autoinduzione residua, cioè non compensata, riesce uguale al differenziale corrispondente di $L + L' - \frac{1}{\omega^2 C}$, vale a dire a

$$\frac{dC}{\omega^2 C^2} = \frac{dC}{C}\,\frac{1}{\omega^2 C} = \frac{p}{100}(L + L')$$

(*) *Elektrotechnik und Maschinenbau,* 26 marzo 1911.

oppure a

$$\frac{2\,d\omega}{\omega^3\,C} = 2\,\frac{d\,\omega}{\omega}\,\frac{1}{\omega^2\,C} = \frac{2\,p}{100}\,(L + L')$$

ed è quindi proporzionale al valore dell'autoinduzione totale, che effettivamente esiste nel circuito.

La capacità necessaria diminuisce rapidamente coll'aumentare della frequenza; ma, se la condizione di risonanza nel circuito voltmetrico fosse verificata soltanto approssimativamente, l'autoinduzione residua (di cui abbiamo trovato or ora i possibili valori) può ancora dar luogo, specialmente quando lo sfasamento φ nel circuito esterno è rilevante, ad un errore di misura, che riesce tanto meno trascurabile quanto più elevata è la frequenza.

La struttura della formola (1) mostra, che in essa una semplificazione radicale si può raggiungere soltanto annullando $tg\,\varepsilon$, come si ottiene col metodo precedente. Tuttavia, se non è a disposizione un condensatore coi requisiti voluti, possono riuscire utili alcuni artifici, che hanno soltanto lo scopo più modesto di rendere le misure più spicciative di quanto comporti la pura applicazione della formola (1). Questo scopo si può raggiungere il più delle volte considerando separatamente i due errori.

Alla deviazione α se ne può sostituire un'altra spoglia dell'errore di m. i. nel modo seguente:

Essendo la bobina fissa attraversata ancora dalla stessa corrente usata nella misura, si chiuda la derivazione voltmetrica, senza modificarne la resistenza, su se stessa. La deviazione β, che così si ottiene, è dovuta soltanto all'effetto della m. i., e quindi per tale deviazione β la correzione per m. i. è $-\beta$. Inoltre per la deviazione media della scala, in corrispondenza alla quale le due bobine sono ortogonali, la correzione è zero; ed allora per ogni altra deviazione la correzione, espressa in divisioni della scala, si deduce subito dalle due accennate, osservando che, essendo il cofficiente di m. i. una funzione lineare della deviazione, lo stesso avviene della correzione corrispondente.

Se si devono eseguire molte misure in condizioni diverse, non è necessario ripetere ogni volta l'esperimento del corto circuito della derivazione voltmetrica, ma ne basterà uno solo, nel quale opportunamente si farà attraversare la bobina fissa da una corrente sinusoidale della più alta frequenza disponibile ν_0 (purchè non eccessiva, avuto riguardo alla formazione di correnti parassite) e di intensità I_0 uguale o vicina al massimo valore lecito, non lasciando nel circuito voltmetrico altra resistenza all'infuori di quella contenuta in modo fisso nell'istrumento, così da rendere quanto più è possibile sentito l'effetto della mutua induzione. Per una terna qualunque di valori I, ν, r la correzione relativa ad una data deviazione si ricava da quella, corrispondente per la stessa deviazione alla terna I_0, ν_0, r_0, moltiplicandola per il rapporto

$$\left(\frac{\nu\,I}{r}\right)^2 : \left(\frac{\nu_0\,I_0}{r_0}\right)^2$$

Difatti se δ è quella parte della deviazione, che corrisponde all'effetto della m. i. (o, ciò che torna lo stesso, se $-\delta$ è la correzione relativa), a tenore dell'espressione generale della coppia si ha:

$$K\,\delta = \frac{\omega\, M\, I^2}{r} \cos\varepsilon \;\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{\omega\, M\, I^2}{r}\,\frac{tg\,\varepsilon}{1+tg^2\,\varepsilon}$$

Poichè $tg^2\,\varepsilon$ anche a frequenze elevate è piccolo rispetto all'unità, ed inoltre, trattandosi qui di una correzione, non è necessaria una grande esattezza nella sua valutazione, possiamo con ottima approssimazione scrivere più semplicemente:

$$K\,\delta = \frac{\omega\, M\, I^2}{r}\, tg\,\varepsilon = (2\,\pi)^2\; L\,M \left(\frac{\nu\, I}{r}\right)^2$$

e cioè, a parità di M e quindi di α, δ è proporzionale a $\left(\frac{\nu\, I}{r}\right)^2$. (*)

La correzione per m. i. riesce spesso, data la piccolezza del prodotto $L\,M$, di importanza secondaria, ed è sempre di nessun conto per frequenze vicine alle ordinarie. Per un dato istrumento, dopo l'esperimento del corto circuito, è facile stabilire, basandosi sulle leggi secondo cui varia la correzione, un valore del rapporto $\frac{\nu\, I}{r}$, al disotto del quale l'influenza della mutua induzione, tenuto conto dell'esattezza che si vuol raggiungere, riesce trascurabile nella regione iniziale della scala, e quindi tanto più nelle altre regioni. La sua influenza però a frequenze sufficientemente elevate può riuscire notevole, sopratutto a tensioni basse, che richiedono una resistenza r relativamente piccola.

Un altro artificio per eliminare l'effetto della m. i., praticamente più comodo del suaccenato, ma che richiede l'uso di un istrumento ausiliare, consiste nell'introdurre nel circuito voltmetrico una f. e. m., che riesca per ogni deviazione uguale e contraria a quella di mutua induzione. Una simile f. e. m. può essere fornita da un sistema di bobine identiche a quelle del wattmetro e che si trovino nell'identica posizione relativa, essendo inoltre le bobine amperometriche del wattmetro e del sistema ausiliare inserite in serie e le voltmetriche in opposizione, o viceversa.

(*) Se invece di esprimere la correzione di m. i. in divisioni della scala, la si esprime in watt ($= -K r \delta$) essa risulta proporzionale a $\frac{\nu^2\, I^2}{r}$.

Ripetendo l'esperienza del corto circuito per diverse posizioni dell'indice (in cui esso viene portato meccanicamente), si può verificare se la deviazione si annulla effettivamente in corrispondenza alla mezzaria della scala; un'eventuale divergenza, dovuta a piccole inesattezze di costruzione o di montaggio, nulla toglierebbe però all'applicabilità sostanziale del metodo.

Per lo scopo che abbiamo di mira non si può però usare senz'altro un secondo wattmetro uguale a quello di misura, perchè, dovendo le connessioni di una sua bobina riuscire invertite rispetto a quelle della corrispondente bobina del primo wattmetro, uno degli istrumenti tenderebbe a dare una deviazione negativa, e non si realizzerebbe affatto la condizione voluta dell'uguaglianza di posizione delle due bobine mobili rispetto alle fisse. È quindi necessario di spostare meccanicamente l'indice di uno degli istrumenti, per fargli occupare la stessa posizione dell'indice dell'altro; ed allora, poichè un istrumento perde il suo carattere di wattmetro, si può anche adoperare una costruzione di strumento ausiliare (o meglio di pseudo-istrumento), più comoda e nello stesso tempo più a buon mercato, nella quale la bobina mobile venga comandata dall'esterno mediante un bottone, e manchino le parti ora superflue, quali le molle di torsione e l'apparecchio di smorzamento delle oscillazioni; per ottenere però valori semplici per le costanti del gruppo misuratore, converrà aggiungere anche nello pseudoistrumento (analogamente a quanto si pratica nei wattmetri) una resistenza in serie alla bobina voltmetrica, portando la resistenza del loro complesso a 1000 Ohm.

La misura si effettuerà allora nel modo seguente: Sia γ la deviazione del wattmetro, mentre l'indice dello strumento ausiliare è a zero; girando il bottone, si dia anche all'indice di quest'ultimo la stessa deviazione γ; con ciò la f. e. m. di m. i. risultante nel circuito voltmetrico complessivo viene alterata, tendendo ad annullarsi, sicchè la deviazione del wattmetro non potrà conservare il valore γ, ma ne assumerà un altro γ', più vicino a quello che si otterrebbe, se non esistesse mutua induzione fra le bobine; si dia allora anche allo pseudoistrumento la deviazione γ' e così via. In una parola si faccia inseguire per spostamenti successivi, oppure anche mediante un movimento graduale, il primo indice dal secondo, finchè entrambi segnino la medesima deviazione, condizione questa che praticamente si può raggiungere mediante una manovra brevissima.

Un medesimo istrumento ausiliare serve ad eliminare l'errore di m. i. qualunque sia la frequenza, ed il suo costo è limitato. Si può però osservare, che in seguito al suo uso viene raddoppiata l'autoinduzione del circuito voltmetrico, e di conseguenza, se in questo si mantiene la stessa resistenza come per l'impiego di un solo wattmetro, anche l'errore per autoinduzione resta duplicato. Quest'ultimo però verrà poi opportunamente eliminato o corretto, sicchè quel che importa è l'inesattezza, che si può commettere nella valutazione della correzione corrispondente; ora, poichè la correzione, anche se raddoppiata, è solitamente di non grande importanza rispètto al termine principale, l'inesattezza nella sua valutazione, in generale già piccola per se stessa, si ripercuote percentualmente in grado di gran lunga minore sul risultato finale della misura. Se invece si mantiene costante l'errore per autoinduzione duplicando la resistenza, diminuisce la sensibilità della misura, restando raddoppiato l'errore relativo di lettura. A meno di casi estremi tanto l'uno che l'altro inconveniente sono leggieri; tuttavia, sia perchè questi esistono che per il costo dell'istrumento ausiliare, non varrà la pena di preferire questo metodo al precedente, se non quando si debbano eseguire numerose misure, per le quali l'influenza della m. i. sia relativamente importante.

Spogliata la lettura con uno dei metodi indicati dall'errore di induzione mutua, la formula (1) si riduce all'espressione nota:

$$W = Kra \frac{1 + tg^2 \varepsilon}{1 + tg\, \varepsilon\, tg\, \varphi} \tag{2}$$

, che è naturalmente applicabile anche al gruppo di due istrumenti, purchè si introduca per $tg\, \varepsilon$ il valore corrispondente all'autoinduzione e alla resistenza complessiva del circuito voltmetrico.

Usando questa formola, per quanto più semplice della (1), si andrebbe ancora incontro al seccante procedimento per successive approssimazioni; ma il più delle volte al suo uso si potranno sostituire metodi più spicciativi.

I due artifici che indicheremo in proposito si riferiscono l'uno a sfasamenti rilevanti nel circuito esterno, che provocano deviazioni piccole, l'altro invece a sfasamenti meno sentiti, o, più esattamente, a deviazioni relativamente grandi, quali sono appunto quelle che si ottengono per sfasamenti esterni non molto notevoli, quando tensione e corrente sono abbastanza vicine ai limiti massimi leciti per l'istrumento scelto. (*)

Osserviamo dapprima che la formola (2) si può scrivere:

$$W = Kra\ (1 + tg^2 \varepsilon) - W\, tg\, \varepsilon\ tg\, \varphi$$

od anche, sostituendo nel secondo membro $E\,I\ \cos\varphi$ a W,

$$W = Kra\ (1 + tg^2 \varepsilon) - E\,I\ \operatorname{sen}\varphi\, tg\, \varepsilon$$

Se $\cos\varphi$ ha un valore sufficientemente piccolo, si può sostituire ± 1 (a seconda che si tratti di ritardo o di avanzo) a $\operatorname{sen}\varphi$, ottenendo la formola di uso immediato:

$$W' = Kra\ (1 + tg^2 \varepsilon) \mp E\,I\, tg\, \varepsilon$$

Dalle due ultime equazioni si ricava:

$$\frac{W' - W}{W} = \frac{W' - W}{E\,I \cos\varphi} = \frac{\mp 1 + \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\, tg\, \varepsilon$$

(*) Se l'autoinduzione e la resistenza del circuito esterno hanno valori indipendenti dalla frequenza, lo sfasamento a frequenza elevata riesce naturalmente rilevante, anche se piccolo a frequenza ordinaria.

Ma non avviene sempre così: se il circuito esterno è ad es. costituito da una bobina magnetizzante un anello di ferro, a parità di induzione magnetica B si può ritenere costante (o pressochè) il coefficiente di autoinduzione, ma alla resistenza ohmica costante si devono aggiungere le resistenze fittizie corrispondenti alle perdite per isteresi e per correnti parassite; poichè queste variano l'una proporzionalmente alla frequenza e l'altra al suo quadrato, lo sfasamento potrà diminuire coll'aumentare della frequenza.

e dalla considerazione dei valori numerici di questo errore relativo in funzione di diversi valori di φ è facile dedurre, che il campo di applicazione della semplificazione accennata, che ha il vantaggio di servire proprio quando la correzione è rilevante, è molto più esteso di quanto possa sembrare a prima vista.

Supponiamo in secondo luogo che a sia abbastanza grande. Se per semplicità riteniamo $tg^2\,\varepsilon$ trascurabile rispetto all'unità, la formola (2) si riduce a:

$$W\ (1 + tg\,\varepsilon\ tg\,\varphi) = Kra$$

In una seconda misura si aumenti il valore della resistenza nel circuito derivato da r ad $m\,r$. Se a' è la nuova lettura (essa pure naturalmente spogliata, se necessario, dall'errore di m. i.) si ottiene:

$$W\left(1 + \frac{tg\,\varepsilon}{m}\,tg\,\varphi\right) = K\,m\,r\,a'$$

o

$$W\ (m + tg\,\varepsilon\ tg\,\varphi) = K\,m^2\,r\,a'$$

Sottraendo da questa equazione quella relativa alla prima misura, si ricava:

$$W = Kr\,\frac{m^2\,a' - a}{m - 1}$$

Il metodo evita l'uso di altri istrumenti per la valutazione della correzione, che viene senz'altro eliminata, ed è quindi scevro di ogni eventuale errore corrispondente al loro impiego; ma a quale errore può esso portare in seguito ad inesattezze nelle letture?

Se nell'espressione dell'errore relativo probabile:

$$\frac{(d\,W)_p}{W} = \frac{\sqrt{(m^2\,d\,a')^2 + d\,a^2}}{m^2\,a' - a}$$

in via d'approssimazione supponiamo $a' = \dfrac{a}{m}$ (come risulterebbe se l'autoinduzione del circuito derivato fosse nulla), e riteniamo uguali gli errori assoluti di lettura, cioè $da' = da$, essa si riduce a

$$\frac{(d\,W)_p}{W} = \frac{\sqrt{m^4 + 1}}{m - 1}\,\frac{d\,a}{a}.$$

Questa espressione dell'errore per $m = 2{,}11$ passa per un minimo uguale a $4{,}11\ \dfrac{d\,a}{a}$, e pel rapporto più comodo $m = 2$ ha il valore $4{,}12\ \dfrac{d\,a}{a}$, quasi uguale al minimo.

Converrà quindi eseguire la seconda misura con resistenza doppia di quella usata nella prima, deducendone:

$$W = Kr \ (4\,\alpha' - \alpha)$$

e cioè in tal caso si applica la formola semplificata del wattmetro, sostituendo però alla deviazione ordinaria α una deviazione corretta uguale a $4\,\alpha' - \alpha$. (*)

Se si ritiene $d\,\alpha = 0{,}1$, l'errore relativo probabile riesce uguale a circa $\frac{0.4}{\alpha}$ (cioè supera di $\frac{0.3}{\alpha}$ l'errore di lettura della sola misura wattmetrica ordinaria); perciò, come abbiamo premesso, il metodo sarà applicabile con sufficiente esattezza solo per α abbastanza grande. (**)

⁂

Dopo la ricerca precedente nasce spontanea la domanda, se la presenza di armoniche superiori nella curva della tensione impressa possa avere un'influenza sensibile sugli errori considerati, e se, nei casi in cui ciò si verifichi, i metodi suindicati di correzione siano ancora applicabili.

Per una tensione sinusoidale abbiamo a suo tempo trovato:

$$K\,r\,\alpha = W \cos^2 \varepsilon \left(1 + tg\,\varphi\; tg\,\varepsilon + \frac{\omega\, M\, I}{E \cos \varphi}\; tg\,\varepsilon\right)$$

Se in questa equazione riteniamo $\cos^2 \varepsilon = 1$, o, cio che torna lo stesso, $tg^2\,\varepsilon$ trascurabile rispetto all'unità, risulta:

$$W = K\,r\,\alpha - E\,I \operatorname{sen}\varphi\; tg\,\varepsilon - \omega\, M\, I^2\, tg\,\varepsilon\,.$$

(*) Tenendo conto anche di $tg^2\,\varepsilon$, che abbiamo precedentemente trascurata rispetto all'unità, la formola generale diverrebbe:

$$W = K\,r\,\frac{m^2\,\alpha' - \alpha - tg^2\,\varepsilon\,(\alpha - \alpha')}{m - 1}$$

e quindi per $m = 2$, osservando anche che nel piccolo termine in $tg^2\,\varepsilon$ si può ad α' sostituire per approssimazione $\frac{\alpha}{2}$

$$W = K\,r \left(4\,\alpha' - \alpha\,(1 + \frac{tg^2\,\varepsilon}{2})\right)$$

(**) Poichè in questo metodo si utilizzano due misure distinte, si può domandare quale sia la correzione da apportarsi al risultato finale per tener conto dell'energia consumata, a seconda delle connessioni, o nel circuito voltmetrico o nella bobina ampermetrica. È facile vedere (ripetendo i passaggi, dopo aver introdotto nelle due equazioni di partenza le correzioni corrispondenti) che nel primo caso la correzione finale è nulla, il che è un altro vantaggio del metodo; mentre nel secondo caso la correzione finale resta uguale (per $m = 2$) a quella corrispondente a ciascuna delle misure.

Se la curva della tensione è deformata, si può applicare questa formola ad un'armonica qualunque di ordine n, purchè $tg^2 \varepsilon_n$ sia trascurabile rispetto all'unità. Questa ipotesi si verifica con approssimazione tanto minore, quanto più elevata è la frequenza fondamentale e l'ordine dell'armonica considerata; lo stesso deve quindi dirsi delle formole che dedurremo in appresso, le quali però per frequenza fondamentale ordinaria si possono ritenere in ogni caso quasi rigorosamente esatte.

Nell'ipotesi fatta la potenza corrispondente all'ennesima armonica ha l'espressione:

$$W_n = K\,r\,\alpha_n - tg\,\varepsilon_n\,(E_n\,I_n \operatorname{sen}\varphi_n + \omega_n\,M\,I_n^2)$$

od anche, essendo $\omega_n = n\,\omega$ e $tg\,\varepsilon_n = n\,tg\,\varepsilon$,

$$W_n = K\,r\,\alpha_n - tg\,\varepsilon\,(n\,E_n\,I_n \operatorname{sen}\varphi_n + \omega\,M\,n^2\,I_n^2)$$

Se noi sommiamo tutte le analoghe equazioni, che si riferiscono all'onda fondamentale ed alle diverse armoniche, dobbiamo introdurre in ciascuna di esse il valore di M corrispondente alla deviazione somma, realmente esistente; sicchè, indicando ora con α e W la deviazione e la potenza complessiva, si ottiene l'espressione generale:

$$W = K\,r\,\alpha - tg\,\varepsilon\,(\Sigma\,n\,E_n\,I_n \operatorname{sen}\varphi_n + \omega\,M\,\Sigma\,n^2\,I_n^2) \qquad (3)$$

nella quale delle due parti, che costituiscono il termine di correzione, dovrà farsi, a seconda della regione della scala, la somma oppure la differenza. (*)

L'influenza delle armoniche sulla correzione risulta di evidenza speciale, quando l'impedenza del circuito esterno sia dovuto in modo preponderante o a resistenza ohmica, o ad autoinduzione o a capacità. In tali casi estremi non altereremo sensibilmente il termine di correzione, introducendo in esso per ciascun angolo φ_n rispettivamente il valore limite 0°, 90° o — 90°, e per l'armonica I_n della corrente utile rispettivamente l'espressione $\frac{E_n}{x}$, $\frac{E_n}{n\,x}$ o $\frac{n\,E_n}{x}$, dove x rappresenta l'impedenza del circuito esterno per l'onda fondamentale. (**)

(*) Come si è già notato, questa formola è soltanto approssimata; la formola esatta, che si ottiene con altrettanta facilità, diversifica dalla (3) solo in quanto in essa compare, in luogo di $Kr\,\alpha$ il termine $Kr\,(\alpha + tg^2\,\varepsilon\,\Sigma\,n^2\,\alpha_n)$, nel quale però è ignota la sommatoria $\Sigma\,n^2\,\alpha_n$. Perciò, se la frequenza fondamentale è così elevata che $tg^2\,\varepsilon$ non sia trascurabile rispetto all'unità, si potrà, con approssimazione maggiore di quella goduta dalla (3), sostituire a $Kr\,\alpha$ il termine $Kr\,\alpha\,(1 + tg^2\,\varepsilon)$.

(**) Si sottintende che resistenza, autoinduzione e capacità conservino valori costanti per tutte le armoniche.

Con tali approssimazioni si ottiene:

$$\text{nel } 1.^\circ \text{ caso: } \quad W = K\,r\,a - tg\,\varepsilon \left(\quad o \quad + \frac{\omega\,M}{x^2}\,\Sigma\,n^2\,E_n^2 \right)$$

$$\text{» } 2.^\circ \text{ » : } \quad W = K\,r\,a - tg\,\varepsilon \left(\frac{\Sigma\,E_n^2}{x} + \frac{\omega\,M}{x^2}\,\Sigma\,E_n^2 \right)$$

$$\text{» } 3.^\circ \text{ » : } \quad W = K\,r\,a - tg\,\varepsilon \left(\frac{-\Sigma\,n^2\,E_n^2}{x} + \frac{\omega\,M}{x^2}\,\Sigma\,n^4\,E_n^2 \right)$$

A seconda della prima formola, se nel carico predomina la resistenza, l'errore per m. i. supera a tensione deformata quello corrispondente ad una tensione sinusoidale di pari valore effettivo nel rapporto $\frac{\Sigma\,n^2\,E^2}{\Sigma\,E_n^2}$.

Per un carico prevalentemente induttivo la seconda formola porta al risultato, che, a parità di tensione effettiva, l'errore è indipendente dalla forma della curva ed uguale quindi a quello dovuto a una tensione sinusoidale. Come si verifica sostituendo $\omega\,\lambda$ ad x e $\frac{\omega\,L}{r}$ a $tg\,\varepsilon$, l'espressione di W è indipendente da ω; epperò, per un dato circuito induttivo (e sempre, ben s'intende, a parità di tensione effettiva), la correzione ha un valore costante per tutte le frequenze fondamentali, a partire dalla più bassa, per la quale si può ritenere ancora verificata l'ipotesi su cui riposa la formola, cioè che la resistenza ohmica del circuito sia trascurabile rispetto alla sua induttanza.

Se invece nel circuito esterno prepondera l'effetto della capacità, a tenore della terza formola la correzione riesce per una tensione deformata notevolmente più sentita che per la sinusoidale, ed in misura tanto maggiore quanto più prevalgono nella curva le armoniche di ordine alto, perchè, rispetto alla tensione sinusoidale di ugual valore effettivo, l'errore per autoinduzione cresce nel rapporto $\frac{\Sigma\,n^2\,E_n^2}{\Sigma\,E_n^2}$ e quello per mutua induzione nel rapporto ancora maggiore $\frac{\Sigma\,n^4\,E_n^2}{\Sigma\,E_n^2}$.

Pel caso speciale di una tensione deformata di frequenza fondamentale ordinaria si possono ricavare dalle osservazioni fatte le seguenti conclusioni. Una correzione per m. i., data la piccolezza di $tg\,\varepsilon$ e di $\omega\,M$, sarà in generale del tutto trascurabile; eventualmente se ne dovrà tener conto solo nel caso che una tensione deformata in modo assai notevole, e specialmente in seguito alla presenza di armoniche di ordine alto, agisca su un circuito esterno, nel quale predomina l'effetto della capacità. Una correzione per a. i. sarà necessaria, se la corrente principale ritarda rispetto alla tensione, solo quando lo sfasamento sia così notevole, da imporne una anche per una curva sinusoidale; se al contrario la corrente è in avanzo rispetto alla tensione, la lettura andrà corretta altresì in corrispondenza a sfasamenti, che, a seconda del grado di deformazione della tensione, possono riuscire di parecchio minori di quelli, che richiedono una correzione, se accompagnati da una tensione sinusoidale.

Quali degli espedienti descritti a suo tempo per eliminare l'influenza dell'auto e della mutua induzione per tensioni sinusoidali raggiungono lo stesso scopo anche per tensioni deformate?

Il metodo del condensatore non può affatto correggere gli errori dovuti alle armoniche superiori, perchè la risonanza si può ottenere soltanto per un'unica frequenza. (*)

Invece l'influenza della m. i. si può in ogni caso eliminare con esattezza mediante il metodo dei due istrumenti, che equivale all'annullamento di M. Così pure la correzione relativa si può ancora trovare mediante l'esperimento del corto circuito della derivazione voltmetrica, purchè però si faccia attraversare la bobina fissa dall'identica corrente utilizzata nella misura di potenza.

Per un ritardo rilevante della corrente utile rispetto alla tensione, si può calcolare facilmente la correzione per a. i. Invero (analogamente a quanto abbiamo visto per curve sinusoidali) si può adottare senza errore sensibile l'espressione limite della correzione, corrispondente al ritardo di 90°, che abbiamo ultimamente trovato essere uguale a

$$- tg\, \varepsilon \frac{E^2_{eff}}{x}$$

E poichè è noto, che, a meno di deformazioni eccezionali nella curva della tensione, per un carico molto induttivo risulta con grande approssimazione

$$x = \omega \lambda = \frac{E_{eff}}{I_{eff}}$$

, il termine di correzione assume la forma assai semplice

$$- E_{eff}\, I_{eff}\, tg\, \varepsilon$$

, uguale a quella trovata a suo tempo per curve sinusoidali nel caso di sfasamenti rilevanti.

Se invece lo sfasamento nel circuito esterno, pure essendo ancora notevole, è dovuto all'azione della capacità, riesce incomodo apportare con esat-

(*) Potrebbe sembrare, a tenore della formola generale (3), che l'inserzione nel circuito voltmetrico di un condensatore in risonanza con L a frequenza fondamentale, annullando $tg\, \varepsilon$, annullasse altresì in ogni caso il termine di correzione; ma non si deve dimenticare che nella deduzione di quella formola si è utilizzata l'uguaglianza $tg\, \varepsilon_n = n\, tg\, \varepsilon$ che non sussiste più, quando il circuito contiene anche un condensatore.

tezza la correzione relativa all'a. i. Difatti, poichè abbiamo visto, che essa nel caso limite $\varphi_n = -90°$ è espressa da

$$+ tg\,\varepsilon \frac{\Sigma\, n^2 E_n^2}{x}$$

, con procedimento analogo a quello seguito nel caso precedente si può porla sotto la forma:

$$+ E_{eff} I_{eff}\, tg\,\varepsilon \sqrt{\frac{\Sigma\, n^2 E_n^2}{\Sigma\, E_n^2}};$$

ma il radicale non può calcolarsi se non si conosce la forma della curva della tensione.

Nei casi in cui la deviazione α è sufficientemente grande, si può anche per curve deformate liberare la misura dell'errore per a. i. mediante il metodo delle due letture, di cui la seconda con resistenza doppia nel circuito voltmetrico. È facile verificare infatti, che, una volta sceverate le letture dall'errore di m. i., si può in tal modo eliminare la correzione per autoinduzione, espressa in generale, secondo la formola (3), da

$$- tg\,\varepsilon\, \Sigma\, E_n\, I_n \operatorname{sen} \varphi_n,$$

arrivando ancora alla formola semplice:

$$W = Kr\,(4\,\alpha' - \alpha).$$
