OSCILLAZIONI PENDOLARI AUTOGENE DELLE MACCHINE SINCRONE

ALBERTO DINA

Un fenomeno sul quale si è scritto assai poco, ma che negli elettrotecnici che l'hanno osservato ha sempre destato il più vivo interesse, sia per i disturbi pratici a cui inaspettatamente dava luogo che per il suo carattere teoricamente enigmatico, è quello delle oscillazioni pendolari libere e persistenti, che si suscitano nelle macchine sincrone quando la resistenza nel circuito di armatura supera un certo valore.

Queste oscillazioni, al pari delle altre oscillazioni libere più generalmente note, quelle smorzate o transitorie, ripetono la loro origine da una variazione, sia essa permanente o passeggera, nelle condizioni di marcia della macchina, ma, come mostra l'esperimento, vengono poi per effetto della resistenza nel circuito d'armatura progressivamente intensificate, e ciò talvolta fino a raggiungere uno stato di regime, tal'altra fino a produrre la disincronizzazione della macchina.

La loro causa prima è spesso così piccola o di così breve durata da sfuggire all'osservatore, sicchè il più delle volte sembra, ben inteso a torto, che esse nascano spontaneamente. Invece certamente spontaneo, cioè dovuto a un fenomeno interno alla macchina stessa, è il loro successivo sviluppo in dipendenza della resistenza d'armatura; ed in questo senso tali oscillazioni possono a buon diritto chiamarsi autogene.

Un simile effetto della resistenza appare a prima vista tanto più strano, inquantochè siamo abituati in altro campo, cioè nello studio delle oscillazioni elettriche in circuiti contenenti autoinduzione e capacità, a considerare la resistenza come smorzatrice e non già come amplificatrice di oscillazioni.

L'aver incontrato anch'io il suggestivo fenomeno descritto in alcuni sommari esperimenti eseguiti con un piccolo motore sincrono fu l'occasione, che mi indusse ad approfondirne la teoria.

*

L'Ing. Rebora per il primo diede nel 1903 notizia delle oscillazioni in discorso, descrivendo un caso pratico in cui egli ne aveva constatato la perniciosa influenza (1). In due impianti idroelettrici (cioè a motori primi a coppia costante in un giro), nei quali venne anche esclusa un'eventuale influenza dei regolatori, la marcia in parallelo riusciva impossibile in causa di forti oscillazioni pendolari; queste, come il Rebora dimostrò praticamente con eleganti esperienze, erano provocate dalla resistenza del circuito d'armatura e più precisamente dalla resistenza della linea, che collegava gli alternatori dell'una centrale cogli alternatori o motori sincroni dell'altra, quando la sua lunghezza (che poteva venire variata, essendo disponibili linee con percorsi diversi) superava un certo valore.

L'Ing. G. Semenza, in seguito ai risultati del Rebora, ristudiò, con maggiori particolari la questione mediante esperimenti istituiti con macchine di altra centrale e con resistenze ed autoinduzioni concentrate (2).

Egli inoltre, basandosi sulle ricerche teoriche allora note intorno alle oscillazioni pendolari, tentò di dare una sommaria interpretazione qualitativa del fenomeno. Ma la causa da lui invocata per l'amplificazione delle oscillazioni, cioè l'influenza dell'isteresi del ferro d'armatura sulla reazione di indotto, lascia molto perplessi, perchè, pur potendo avere eventualmente per effetto il fenomeno in discorso, non è in chiara relazione coi risultati sperimentali descritti, nei quali invece la resistenza del circuito d'armatura aveva una così netta e decisiva azione nell'intensificare le oscillazioni autogene.

Anche da considerazioni teoriche di Boucherot (1) risulta che l'isteresi del ferro d'armatura può produrre oscillazioni del carattere accennato, ma le considerazioni stesse porterebbero altresì alla conseguenza, che la coppia perturbatrice dovuta all'azione concomitante dell'isteresi e della resistenza d'armatura dovrebbe invece diminuire col crescere di quest'ultima!

Del resto varii fenomeni possono in speciali circostanze dar luogo ad oscillazioni libere non transitorie, ma non è il caso di occuparcene qui, dove vogliamo limitare l'indagine alla spiegazione delle oscillazioni di cui la resistenza del circuito d'armatura appare come causa precipua. Vale però la pena di accennare ad una breve memoria di carattere generale di K. W. Wagner (2), dove questi, senza indagarne le cause particolari, cercò di rendere matematicamente plausibile la possibilità di oscillazioni libere e persistenti nelle macchine sincrone, anche se inserite su una rete di potenza infinita.

L'influenza della linea sulle oscillazioni autogene, constatata dal Rebora e che, come vedremo, si esplica con alcune speciali caratteristiche, non fu mai presa in particolare esame (3), e fu solo nel 1911 che l'influenza della resistenza propria dell'armatura della macchina (o meglio, la sua principale influenza) venne teoricamente interpretata da Dreyfus (4), che aveva osservato il manifestarsi di oscillazioni autogene in convertitrici inserite in cascata con motori asincroni. In complesso ad analoghi risultati finali pervenne recentemente anche Rogowski (5) con diverso metodo di ricerca.

Le memorie di questi due autori però contengono spiegazioni di natura aridamente matematica, molto complicata la prima, in parecchi punti inesatta la seconda, sicchè il loro studio non riesce nè facile nè soddisfacente per l'ingegnere, perchè questi, che a ragione considera l'indagine matematica soltanto come un mezzo, desidera che essa si esplichi in modo quanto più è possibile semplice, e sopratutto richiede che nella trattazione di un problema ne venga chiarito a fondo il lato fisico e tecnico, cioè messi in opportuno rilievo i concetti su cui si impernia la spiegazione, e dedotte dalle formule con esauriente discussione tutte le conseguenze pratiche di cui esse sono suscettibili.

Per veder chiaro nel complesso fenomeno me lo sono spiegato per conto mio, e riporto qui la trattazione che ne ho dato, nella speranza che essa torni non del tutto sgradita a taluno dei moltissimi, che certamente si sono appassionati a suo tempo alle interessanti comunicazioni del Rebora e del Semenza.

---

(1) Effetto delle linee sugli alternatori e motori sincroni. — *Atti dell'A. E. I.*, 1903.

(2) Contributo allo studio delle oscillazioni pendolari proprie delle macchine sincrone. — *Atti dell'A. E. I.*, 1904.

(1) Influence de l'hystérésis sur le couplage des alternateurs en parallèle. — *Bull. Soc. Int. des Electriciens*, 1904.

(2) Über dauernde Pendelungen bei Wechselstrommaschinen. — *Elektrotechnik und Maschinenbau*, 1908.

(3) Soltanto considerazioni accessorie, non interessanti la vera spiegazione di questa influenza nè delle oscillazioni autogene in genere, sono state sviluppate da Durroulin. Association en parallèle des installations à courant alternatif. — *Atti del Congresso internaz. delle applic. elet.*, Torino, 1911.

(4) Einführung in die Theorie der selbsterregter Schwingungen synchroner Maschinen. — *Elektrotechnik und Maschinenbau*, 1911.

(5) Selbsterregte Schwingungen von Synchronmotoren. — *Archiv für Elektrotechnik*, 1915.

*

Per fissare le idee ci riferiremo in quanto segue al caso di un motore sincrono trifase ad armatura fissa ed induttore rotante, che per semplicità supporremo bipolare. L'avvolgimento di ogni fase dell'armatura sia concentrato, in modo che tutte le sue spire siano attraversate dal medesimo flusso. L'eccitazione sia fatta mediante una sorgente meccanicamente indipendente.

Il motore sia sottoposto ad un momento resistente costante ed ai suoi morsetti sia alimentato per ogni fase da una tensione di ampiezza V e di pulsazione ω, fornita da una rete di potenza infinita libera da ogni perturbazione di carattere continuativo. Essendo la macchina bipolare, la sua velocità angolare coincide colla pulsazione.

Supponiamo inoltre che si tratti di una macchina ideale, per la quale valgano le ipotesi semplificatrici ordinariamente adottate nella teoria, e cioè andamento sinusoidale per le diverse grandezze alternative, assenza di isteresi nel ferro, costanza della permeabilità di questo, invariabilità della riluttanza incontrata dal flusso d'armatura nelle diverse posizioni della ruota polare, e, come conseguenza delle due ultime condizioni, costanza del coefficiente L di autoinduzione per ogni fase dell'armatura (macchina a reattanza costante). La dispersione magnetica sia ammessa nulla.

Ben s'intende però che non potremo trascurare, come pure si fa di solito nella teoria semplificata, la resistenza r di ogni fase, volendone appunto studiar qui la speciale influenza sul comportamento della macchina.

Si avverta che nelle formule che svilupperemo le diverse grandezze si intendono misurate in unità assolute c. g. s.

*

Giova innanzitutto richiamare sommariamente l'attenzione su alcune proprietà del motore in marcia regolare, che ci serviranno poi nella trattazione del suo funzionamento anormale o con oscillazioni.

Incominciamo col considerare il diagramma che si può istituire per ogni fase in corrispondenza ad un certo carico resistente e ad una certa eccitazione.

Nella fig. 1, dove la freccia indica il senso di rotazione dei vettori, Φ rappresenti l'ampiezza del flusso induttore, a variazione sinusoidale, concatenato con ogni spira, ampiezza che per ipotesi è la medesima per tutte le spire di una fase e coincide col valore del flusso emanante da un polo e rotante nello spazio col sistema induttore.

Il vettore E_o, ampiezza della forza controelettromotrice indotta da questo flusso nella fase considerata dell'armatura, ritarda di 90° rispetto a Φ, e di un certo angolo α rispetto alla direzione opposta a quella della tensione V applicata ai morsetti. Quest'angolo di fase α coincide coll'angolo di cui nello spazio la ruota polare ritarda rispetto alla posizione, corrispondente ad un carico nullo, per la quale la tensione impressa e la forza controelettromotrice riuscirebbero uguali ed opposte.

La risultante di V e di E_o produce nell'impedenza Z di ogni fase dell'armatura una corrente di ampiezza I_o (non indicata nella figura) alla cui considerazione ci conviene sostituire qui quella delle sue componenti

$$I_v = \frac{V}{Z} \quad \text{e} \quad I_e = \frac{E_o}{Z}$$

che verrebbero separatamente generate da V e da E_o.

L'angolo di ritardo di ognuna di queste correnti rispetto alla tensione o f. e. m. corrispondente sia

$$\psi = 90° - \varrho$$

dove ϱ, il cui uso in questa trattazione è più comodo di quello dell'angolo complementare ψ, considerato in altri problemi, è definito dalla relazione

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{r}{\omega L}$$

la quale dà luogo altresì alle due seguenti:

$$\operatorname{sen} \varrho = \frac{r}{Z} \qquad \cos \varrho = \frac{\omega L}{Z}$$

Se assumiamo come fondamentale la direzione della tensione impressa V, se riteniamo cioè il suo valore momentaneo

$$v = V \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

dal diagramma si deducono subito le fasi e quindi i valori momentanei delle altre grandezze, che, per α costante co-

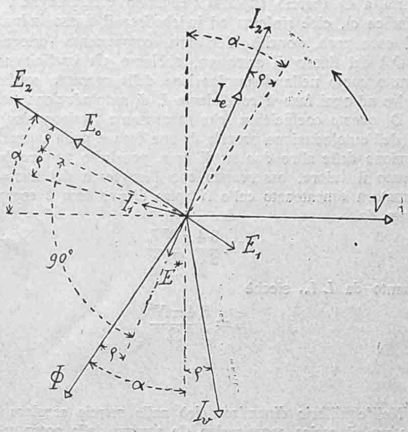

Fig. 1.

me supponiamo fin qui, contrassegniamo coll'indice zero. Risulta cioè

$$\varphi_o = -\Phi \cos (\omega t - \alpha) \tag{2}$$

$$e_o = -E_o \operatorname{sen} (\omega t - \alpha) \tag{3}$$

$$i_o = i_v + i_e = -\frac{V}{Z} \cos(\omega t + \varrho) + \frac{E_o}{Z} \cos(\omega t - \alpha + \varrho) \tag{4}$$

Le correnti sfasate di 120°, che scorrono nei tre avvolgimenti dell'armatura, danno luogo, come è ben noto, ad un flusso risultante d'armatura o di reazione che ruota colla stessa velocità angolare ω del sistema polare, formando così col flusso induttore un angolo invariabile per ogni determinata condizione di marcia, e che ha una grandezza costante Φ_r uguale a $\frac{3}{2}$ dell'ampiezza di ciascun flusso componente, sicchè

$$\Phi_r = \frac{3}{2} \frac{4 \pi N I_o}{\mathfrak{R}}$$

dove N è il numero di spire di una fase ed $\mathfrak{R}$ la riluttanza incontrata dal flusso.

In quanto poi noi consideriamo la concatenazione di questo flusso rotante Φ_r con una spira dell'armatura, otteniamo una grandezza a variazione sinusoidale, rappresentabile vettorialmente nel diagramma al pari del flusso induttore concatenato; e precisamente, poichè essa diventa massima nell'istante in cui il flusso di reazione è diretto secondo l'asse della spira considerata, vale a dire contemporaneamente al flusso componente prodotto dalla fase a cui la spira appartiene, il suo vettore ha la stessa direzione del vettore I_o della corrente.

Ne consegue che la componente Φ_c del flusso risultante d'armatura nella direzione del flusso induttore Φ è uguale a

$$\frac{3}{2}\frac{4\pi N}{\mathfrak{R}} I_o \cos(\Phi, I_o)$$

oppure, sostituendo alla proiezione di I_o la somma delle proiezioni delle sue due componenti I_v ed I_e,

$$\begin{aligned}\Phi_c &= \frac{3}{2}\frac{4\pi N}{\mathfrak{R}}\left\{ I_v \cos(\Phi, I_v) + I_e \cos(\Phi, I_e)\right\} = \\ &= \frac{3}{2}\frac{4\pi N}{\mathfrak{R}}\left\{\frac{V}{Z}\cos(\alpha+\varrho) - \frac{E_o}{Z}\cos\varrho\right\}\end{aligned} \tag{5}$$

La Φ_c a seconda del suo segno risulta concorde o contraria a Φ (perciò appunto l'abbiamo contrassegnata coll'indice c), cioè rinforza od indebolisce il flusso induttore. Di essa però, nonchè dell'altra componente (ortogonale a Φ_c) del flusso di armatura, abbiamo già implicitamente tenuto conto nella determinazione della corrente coll'attribuire ad ogni fase il coefficiente L di autoinduzione totale.

Di questo coefficiente, che rappresenta l'azione risultante dell'autoinduzione propria di una fase e della mutua induzione delle altre due su di essa, possiamo trovare facilmente il valore, osservando che l'ampiezza del flusso di armatura concatenato colle N spire di una fase è espresso tanto da

$$N \cdot \frac{3}{2}\frac{4\pi N I_o}{\mathfrak{R}}$$

quanto da $L\, I_o$, sicchè

$$L = \frac{3}{2}\frac{4\pi N^2}{\mathfrak{R}} \tag{6}$$

*

Nell'equilibrio dinamico, cioè nella marcia regolare del motore, il carico complessivo (la somma della potenza resistente meccanicamente utile e di quella perduta nella macchina stessa per attrito e nel ferro) è uguale e di segno contrario alla potenza motrice, cioè alla potenza elettrica fornita alla macchina, diminuita della parte consumata per effetto Joule nella resistenza d'armatura.

Questa potenza motrice equivale al triplo della potenza elettromagnetica a cui in ciascuna fase la corrente d'armatura dà luogo colla componente — E_o della tensione impressa, che fa equilibrio alla f. c. e. m. Essa è altresì uguale al prodotto della coppia di rotazione sviluppata dalla macchina per la velocità angolare ω; ne consegue che, essendo E_o ed I_o ampiezze e non valori effettivi, tale coppia ha il valore

$$C_o = -\frac{3}{\omega}\frac{E_o}{\sqrt{2}}\frac{I_o}{\sqrt{2}}\cos(E_o, I_o)$$

o, considerando in luogo della potenza corrispondente ad I_o la somma di quelle dovute alle sue componenti I_v ed I_e,

$$\begin{aligned}C_o &= -\frac{3}{2}\frac{E_o}{\omega}\left\{\frac{V}{Z}\cos(90^\circ+\alpha+\varrho) + \frac{E_o}{Z}\cos(90^\circ-\varrho)\right\} = \\ &= \frac{3}{2}\frac{V E_o}{\omega^2 L}\cos\varrho\left\{\operatorname{sen}(\alpha+\varrho) - \frac{E_o}{V}\operatorname{sen}\varrho\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

avendo a Z sostituito $\dfrac{\omega L}{\cos\varrho}$.

Se, invece che da motore, la macchina sincrona funziona da generatore, l'angolo α rappresenta non più un ritardo, sibbene una precessione. Basterà quindi, senza fare altro apposito calcolo, cambiare il segno di α nella formula precedente per ottenere l'espressione della coppia, che allora viene sviluppata dalle forze elettromagnetiche nell'armatura. Questa coppia costituisce l'intermediario fra il carico elettrico complessivo (somma della potenza utilizzata nel circuito esterno e della perdita per effetto Joule nell'armatura) e la macchina motrice, la quale inoltre sopperisce direttamente alle perdite per attrito e nel ferro della macchina elettrica.

Si ottiene così per la coppia in discorso il valore:

$$C'_o = -\frac{3}{2}\frac{V E_o}{\omega^2 L}\cos\varrho\left\{\operatorname{sen}(\alpha-\varrho) + \frac{E_o}{V}\operatorname{sen}\varrho\right\} \tag{8}$$

(C_o e C'_o hanno segno opposto, rappresentando rispettivamente una coppia motrice ed una coppia resistente).

Per $\varrho = 0$, cioè nel caso limite di resistenza d'armatura nulla, le due formule si riducono all'espressione:

$$C^*_o = \pm\frac{3}{2}\frac{V E_o}{\omega^2 L}\operatorname{sen}\alpha \tag{9}$$

Dalle formule indicate risulta che, per una data eccitazione e quindi per una data E_o, ad una variazione di α corrisponde una variazione in ugual senso della coppia elettromagnetica, sicchè, aumentando il carico, l'equilibrio dinamico si può realizzare nuovamente mediante un opportuno maggior spostamento della ruota polare. Ciò però soltanto fino ad un certo limite; ed invero la coppia elettromagnetica, quando $r = 0$, ha in ogni caso un massimo per $\alpha = 90^\circ$; quando invece $r > 0$, il massimo ha luogo per il motore in corrispondenza ad un ritardo

$$\alpha = 90^\circ - \varrho$$

e per il generatore in corrispondenza ad una precessione

$$\alpha' = 90^\circ + \varrho$$

Ciascuno di questi angoli rappresenta per il caso relativo il limite di stabilità della macchina, inquantochè se lo spostamento della ruota polare, in conseguenza dell'aumento del carico, cresce al di là di tale valore, diminuisce invece la coppia elettromagnetica nell'armatura, sicchè il generatore accelera insieme alla sua macchina motrice, il motore rallenta, uscendo pertanto sia l'uno che l'altro di sincronismo. In conclusione, dati i diversi valori che l'angolo limite presenta nei diversi casi, vediamo che la resistenza d'armatura diminuisce la stabilità del motore, aumenta quella del generatore (1).

Ad ogni modo il minore o maggior valore dell'angolo limite non ha alcuna influenza sulla progressiva amplificazione delle oscillazioni. Esso entra in gioco, facilitando più o meno la disincronizzazione, solo quando le oscillazioni abbiano già raggiunto ampiezza notevole in seguito ad altri fenomeni.

*

Le oscillazioni libere sono originate da una perturbazione dell'equilibrio dinamico.

Consideriamo ad esempio il motore in marcia regolare con un certo spostamento α_o della ruota polare, sicchè la coppia elettromagnetica motrice C_m abbia il valore or ora trovato, che, per mettere in evidenza la sua dipendenza da α_o, indichiamo con $C_o(\alpha_o)$, e la meccanica resistente C_r il valore uguale e contrario — $C_o(\alpha_o)$. In un certo istante venga provocato un momentaneo incremento della coppia motrice da una perturbazione accidentale, ad esempio da un passeggero aumento della tensione alimentatrice; e per semplicità di esposizione supponiamo che esso sia di così

(1) Nel generatore la resistenza dell'armatura fa invece diminuire la precessione per cui si realizza la massima potenza utile, riuscendo essa uguale a $90^\circ - \rho$.

corta durata, che il valore normale di C_m si ripristini prima che venga alterato il movimento della ruota polare a grande momento di inerzia K.

Questa però nel breve intervallo della perturbazione, analogamente all'equipaggio mobile di un galvanometro ballistico attraversato da una scarica istantanea, è stata soggetta ad una coppia di impulsione, che la sposta poi dalla sua posizione di equilibrio con una velocità iniziale Ω relativa ad un osservatore che ruoti colla velocità di sincronismo. Nelle condizioni supposte la Ω è diretta secondo il movimento normale di rotazione e quindi si somma colla velocità ω di questo; e poichè essa riesce tanto più piccola quanto più piccola è l'entità della perturbazione e grande il momento di inerzia (1), la ruota polare continua il suo movimento con una velocità assoluta in generale di poco superiore ad ω.

Date queste condizioni vogliamo per ora ammettere, che per una deviazione x dalla posizione di equilibrio l'espressione della coppia motrice resti sostanzialmente modificata solo in quanto lo spostamento della ruota polare da α_o è divenuto $\alpha_o - x$. In tale ipotesi la coppia risultante $C_m + C_r$ assume il valore

$$C_o(\alpha_o - x) - C_o(\alpha_o) = \frac{3\,V E_o}{2\,\omega^2 L} \cos\varrho \left\{ \mathrm{sen}(\alpha_o + \varrho - x) - \mathrm{sen}(\alpha_o + \varrho) \right\}$$

e la ruota polare consuma la forza viva addizionale acquistata in seguito alla perturbazione, avanzando in contrasto a questa coppia, di mano in mano crescente in valore assoluto, finchè la sua velocità relativa si annulla, cioè la sua velocità assoluta uguaglia da capo quella di sincronismo. Dopodichè la ruota polare viene dalla coppia risultante richiamata con velocità relativa crescente (diretta in senso opposto alla normale e quindi con velocità assoluta decrescente) nella sua posizione di equilibrio, che essa raggiunge con una velocità relativa di nuovo uguale (salvo il segno) a quella di partenza Ω, perchè la coppia risultante ha come coppia motrice riacquistato in questa escursione di ritorno tutti i valori che aveva prima assunti come coppia resistente nell'escursione di andata.

E poichè il fenomeno continua ora in modo analogo, la ruota polare compie delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio preesistente (o intorno ad una nuova, se la perturbazione, invece che transitoria, è stata permanente), le quali si sovrappongono al suo movimento normale di rotazione; esse sono in generale asimmetriche, perchè la coppia risultante non assume valori uguali e di segno contrario in corrispondenza a due deviazioni simmetriche $\pm x$.

Nel caso molto importante di oscillazioni di ampiezza sufficientemente piccola, tale cioè da potersi sempre ritenere $\mathrm{sen}\, x = x$ e $\cos x = 1$, la coppia risultante diviene uguale a

$$-\frac{3\,V E_o}{2\,\omega^2 L} \cos\varrho \cos(\alpha_o + \varrho)\, x = -C_s x$$

(dove C_s è il valore assoluto della coppia sincronizzante, o risultante per la deviazione unitaria (2)), cioè essa è proporzionale all'angolo di deviazione dalla posizione di equilibrio; sicchè in questa particolare ipotesi la ruota polare compie intorno ad essa delle oscillazioni simmetriche colle stesse leggi del movimento di un ordinario pendolo per il quale siano nulle le resistenze passive (1).

Anzi l'analogia col pendolo ci permette di ricavare senz'altro la durata di una piccola oscillazione completa

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C_s}}$$

La frequenza delle oscillazioni libere varia quindi da caso a caso, ed anche in una stessa macchina quando se ne modificano le condizioni di funzionamento; ma è assai importante notare, perchè di questa osservazione ci varremo ripetutamente in seguito, che essa risulta quasi sempre piccola rispetto a quella delle usuali correnti industriali; ed invero il suo ordine di grandezza può ritenersi ordinariamento compreso fra mezzo periodo e due periodi al minuto secondo.

Ma in ogni caso interviene nel fenomeno un altro fattore essenziale, lo smorzamento, che formerà anzi l'oggetto principale del nostro studio. Per ora ci basti dire, che durante ogni oscillazione una parte dell'energia originariamente messa in gioco dalla perturbazione, e che si esplica sotto forma di forza viva, viene per effetti connessi al moto pendolare stesso trasformata in calore od in energia elettrica, sicchè di solito le oscillazioni (il cui periodo resta allora alquanto aumentato) vanno rapidamente diminuendo di ampiezza ed in breve si estinguono.

*

Venendo ora al nocciolo del nostro problema, ci domandiamo come mai invece queste oscillazioni riescano talvolta persistenti con ampiezza costante o crescente.

Nella spiegazione delle oscillazioni libere, quale l'abbiamo data or ora, è implicita l'ipotesi, che la coppia di origine elettromagnetica che si suscita nella macchina abbia il medesimo valore, sia quando la ruota polare assuma per un istante un certo spostamento durante il moto pendolare, sia quando essa si trovi in equilibrio dinamico in corrispondenza al medesimo spostamento. Ma in realtà nulla autorizza a priori a simile ipotesi, anzi, poichè l'esperienza ci addita le oscillazioni autogene come dovute a qualche fenomeno interno alla macchina non contemplato dall'ordinaria teoria, si presenta necessaria l'indagine, se l'ipotesi in discorso sia o non sia giustificata. A tal fine dovremo riprendere lo studio del motore sincrono, introducendovi la condizione della variabilità di α.

Il flusso induttore φ, che al tempo t è concatenato con una spira dell'armatura, ha ancora l'espressione indicata per φ_o nella (2), salvochè in essa φ deve venir riguardata come una funzione di t e di α, dove α alla sua volta è funzione di t.

Ne consegue che il valore momentaneo della f. e. m. indotta nelle N spire di una fase è dato da

---

(1) Il valore di Ω si ottiene uguagliando la coppia di impulsione nell'intervallo τ della perturbazione al momento della quantità di moto, cioè

$$C_i = \int_o^\tau (C_m + C_r)\, dt = K\Omega$$

da cui

$$\Omega = \frac{C_i}{K}.$$

(2) La coppia sincronizzante C_s nel motore riesce per un dato valore di α_0 tanto più piccola quanto più grande è ρ e si annulla per $\alpha_0 = 90^\circ - \rho$. Poichè le formule ora sviluppate sono una conseguenza dell'espressione prima indicata per C_0, è naturale che ritroviamo la proprietà a cui eravamo già pervenuti, che cioè la resistenza d'armatura diminuisce la stabilità del motore. Analogamente viene riconfermato il risultato opposto per il generatore.

(1) In questo caso è facile trovare il valore X dell'elongazione scrivendo che la forza viva supplementare acquistata dalla ruota polare è uguale al lavoro della coppia risultante durante lo spostamento considerato, cioè

$$\frac{1}{2} K \Omega^2 = \int_o^X C_s\, x\, dx = \frac{C_s X^2}{2}$$

da cui

$$X = \Omega \sqrt{\frac{K}{C_s}} = \frac{C_i}{K} \sqrt{\frac{K}{C_s}} = \frac{C_i}{\sqrt{K C_s}}$$

L'elongazione X è quindi proporzionale alla coppia di impulsione, ed è tanto più grande quanto più piccoli sono il momento di inerzia e la coppia sincronizzante.

$$e = -N\frac{d\varphi}{dt} = -N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$= -\omega N \Phi \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + N\Phi\frac{d\alpha}{dt}\operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$$

oppure, posto

$$\omega N \Phi = E_0,$$

da

$$e = -E_0 \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) + \frac{E_0}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}\operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$$

$$= -E_0\left(1 - \frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \alpha) = e_0 + e_1 \qquad (10)$$

E cioè oltre al termine e_0, costituito in ugual modo che per α costante, se ne deve considerare un secondo e_1 dipendente dalla velocità di variazione di α.

La corrente i d'armatura viene generata dalla risultante della tensione applicata v e della f. e. m. indotta $e_0 + e_1$, e deve quindi soddisfare all'equazione:

$$v + e_0 + e_1 = L\frac{di}{dt} + ri = L\frac{\partial i}{\partial t} + L\frac{\partial i}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + ri \qquad (11)$$

Invece la corrente i_0, che corrisponde ad α costante e il cui valore abbiamo già indicato nella (4), è determinata dalla più semplice equazione

$$v + e_0 = L\frac{\partial i_0}{\partial t} + ri_0 \qquad (12)$$

Se fosse inoltre

$$e_1 = L\frac{\partial i_0}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \qquad (13)$$

la somma delle (12) e (13) fornirebbe l'equazione (11), in cui al posto di i si troverebbe i_0; in altre parole la i_0 rappresenterebbe altresì la soluzione della (11), cioè la corrente per α variabile.

Ma poichè la (13) in generale non è verificata (vedremo subito in quale caso speciale essa lo sia), la differenza

$$e_1 - L\frac{\partial i_0}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

può venire considerata come una f. e. m. fittizia e^*, alla quale corrisponda una corrente i_1, che si sovrappone alla i_0 durante la variazione di α, sicchè

$$i = i_0 + i_1$$

Sostituendo nell'espressione di e^* ad e_1 e ad i_0 i loro valori indicati nelle (10) e (4), dopo facili trasformazioni di così poco interesse che non vale la pena di riportarle qui, si può porre la f. e. m. fittizia sotto la forma

$$e^* = -\frac{r}{Z}E_0\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}\cos(\omega t - \alpha + \varrho). \qquad (14)$$

Questa espressione mette in evidenza, che la e^* riesce in ogni istante nulla, e quindi $i = i_0$, quando è nulla la resistenza r d'armatura.

Prima di procedere giova qui restringere la generalità per semplificare le considerazioni ulteriori. Abbiamo già notato che la frequenza delle oscillazioni libere è piccola rispetto a quella $\frac{\omega}{2\pi}$ della corrente d'alimentazione. Vogliamo ora altresì supporre che sia piccola la loro ampiezza (cioè quella della differenza $x = \alpha_0 - \alpha$, dove α_0 individua la posizione d'equilibrio della ruota polare), sicchè in conseguenza di queste due condizioni risulta piccola anche l'ampiezza di $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{dx}{dt}$. E precisamente l'ordine di grandezza delle lente oscillazioni sia tale da potersi ritenere senza errore sensibile, che durante ciascun periodo della corrente d'alimentazione α e $\frac{d\alpha}{dt}$ abbiano valori costanti, uguali ai valori medii di quelli che realmente assumono nella breve frazione considerata dell'oscillazione pendolare.

In seguito a questa ipotesi la f. e. m. e^* varia durante un periodo in dipendenza di t esplicito soltanto, sicchè da essa si può facilmente dedurre nel modo usuale il valore della corrispondente corrente i_1 (1). Questa, contenendo al pari di e^* il fattore $\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}$, assai piccolo nelle condizioni suaccennate, è di un ordine di grandezza molto inferiore a quello di i_0, cioè essa rappresenta rispetto alla corrente principale solo un termine di correzione; e lo stesso dicasi di e_1 rispetto ad e_0.

Inoltre in base alla restrizione introdotta potremo applicare il diagramma vettoriale anche durante la variazione di α, intendendo però che esso si riferisca ad un certo periodo, del resto arbitrario, della corrente di alimentazione.

Potremo quindi rappresentare ancora nel diagramma della fig. 1, come pel caso prima trattato di α costante, le grandezze che dipendono solo da α, ed inoltre le f. e. m. e_1 ed e^* e la corrente i_1, che dipendono anche da $\frac{d\alpha}{dt}$. E precisamente in esso, se consideriamo ad esempio un periodo durante il quale $\frac{d\alpha}{dt}$ sia positivo, la e_1, come si deduce dalla (10), riesce individuata da un vettore avente l'ampiezza

$$E_1 = \frac{E_0}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}$$

e fase opposta ad E_0 (2); la e^*, a tenore della (14), da un vettore di ampiezza

$$E^* = \frac{r}{Z}E_0\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt} = E_0 \operatorname{sen}\varrho\,\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}$$

con fase opposta a quella di I_e, come risulta dal confronto dei valori momentanei di queste due grandezze; infine la i_1 da un vettore di ampiezza

$$I_1 = \frac{E^*}{Z} = \frac{E^*}{\omega L}\cos\varrho = \frac{E_0}{\omega L}\frac{\operatorname{sen}2\varrho}{2}\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt}$$

in ritardo di $90° - \varrho$ rispetto a E^*. Epperò, come risulta dal diagramma, la I_1 è in precessione di 2ϱ rispetto a E_0, sicchè la sua componente in direzione di E_0 è

$$I_1\cos(E_0, I_1) = I_1\cos 2\varrho = \frac{E_0}{\omega L}\frac{\operatorname{sen}4\varrho}{4}\frac{1}{\omega}\frac{d\alpha}{dt} \qquad (15)$$

Ciò posto, la f. e. m. totale di induzione $E = E^0 - E_1$ dà luogo colle correnti I_0 ed I_1, tenuto conto degli sfasamenti relativi, a due termini della potenza elettromagnetica in ogni fase dell'armatura; questi, cambiati di segno (cioè riferiti alla componente della tensione impressa che equilibra la E), moltiplicati per tre e divisi per la velocità angolare, ci forniscono l'espressione di due coppie agenti C_0 e C_1.

La coppia C_0 conserva l'espressione precedentemente trovata per α costante nell'equazione (7), perchè, non essendo variata la corrente I_0, le uniche differenze rispet-

(1) Il procedimento usato per trovare la i_1 equivale a limitare la considerazione di una serie al suo primo termine, rispetto al quale i successivi sono trascurabili nelle condizioni supposte.

(2) Per chiarezza di disegno nella figura non si è tenuto conto del diverso ordine di grandezze delle varie ampiezze.

to a questo caso consistono in ciò, che ora l'ampiezza della f. e. m. di induzione invece di E_0 è

$$E = E_0 - E_1 = E_0 \left(1 - \frac{1}{\omega} \frac{d\alpha}{dt}\right),$$

e la velocità angolare invece di ω è $\omega - \frac{d\alpha}{dt}$, ma tuttavia risulta

$$\frac{E_0 \left(1 - \frac{1}{\omega} \frac{d\alpha}{dt}\right)}{\omega - \frac{d\alpha}{dt}} = \frac{E_0}{\omega}$$

sicchè la formula finale, in cui entra appunto questo rapporto, non viene alterata. Ne consegue che il movimento oscillatorio, in quanto dipende dalla risultante di C_0 e della coppia resistente, rimane quello stesso che abbiamo già a suo tempo studiato, cioè un moto pendolare con ampiezza costante.

Ma, quando la resistenza d'armatura è diversa da zero, oltre alla C_0 abbiamo trovato che agisce anche la coppia C_1 corrispondente ad I_1. Approfittando dell'ultima uguaglianza, possiamo introdurre nell'espressione di questa coppia a dirittura E_0 ed ω soltanto, scrivendo

$$C_1 = -\frac{3}{\omega} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{I_1}{\sqrt{2}} \cos(E_0, I_1)$$

oppure per la (15)

$$C_1 = -\frac{3}{2} \frac{E_0^2}{\omega^2 L} \frac{\operatorname{sen} 4\varrho}{4} \frac{1}{\omega} \frac{d\alpha}{dt} \qquad (16)$$

Se la macchina invece che come motore funziona come generatore, basta cambiare α in $-\alpha$ per ottenere il valore della coppia corrispondente C_1', sicchè

$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{E_0^2}{\omega^2 L} \frac{\operatorname{sen} 4\varrho}{4} \frac{1}{\omega} \frac{d\alpha}{dt} \qquad (17)$$

*

Le espressioni delle coppie C_1 e C_1' contengono come fattore la velocità pendolare, che è $\frac{d\alpha}{dt}$ per il generatore e $-\frac{d\alpha}{dt}$ per il motore, rappresentando α nei due casi uno spostamento della ruota polare rispettivamente in ugual senso o in senso contrario al movimento nòrmale di rotazione.

Una coppia proporzionale alla velocità è una coppia di smorzamento. Di solito con questa denominazione si intende anche che la coppia contrasti il movimento; ma, lasciando cadere questa restrizione, possiamo considerare il fenomeno sotto un punto di vista più generale. E precisamente, a seconda che il coefficiente della velocità pendolare è negativo o positivo, la coppia proporzionale alla velocità agisce sempre in senso opposto o sempre in ugual senso al movimento pendolare, e ne fa pertanto diminuire oppure aumentare le elongazioni. Nel primo caso, che è quello che solitamente si presenta, la coppia si può chiamare di smorzamento ordinario o positivo, e nel secondo caso per contrapposto di smorzamento negativo.

Se coesistono parecchie coppie di smorzamento, la natura dello smorzamento risultante dipende dal segno della somma algebrica dei coefficienti della velocità pendolare.

Ad onta che questa velocità sia funzione, oltre che del tempo, delle diverse quantità che intervengono nel fenomeno oscillatorio (fra cui lo stesso fattore di smorzamento), per ogni particolare valore di essa la grandezza di ciascuna delle coppie considerate è proporzionale a quella del relativo coefficiente della velocità. Dato ciò, per brevità di linguaggio indicheremo come proprietà di una coppia di smorzamento le leggi a cui nella sua espressione obbedisce il fattore della velocità pendolare, che rappresenta il valore della coppia in corrispondenza alla velocità unitaria.

In quanto al rapporto fra un'elongazione e la successiva esso dipende e dal fattore di smorzamento e dalle altre grandezze che influiscono sul movimento (momento di inerzia, coppia sincronizzante), come è noto dalla teoria del pendolo smorzato. (1).

Poichè per le coppie C_1 e C_1' il fattore della velocità pendolare è identico, basterà considerarne una sola, ad es. la prima.

Finchè sen 4ϱ è positivo, cioè $\varrho < 45°$ e quindi $r < \omega L$ (si rammenti che normalmente r è molto piccolo rispetto ad ωL), la coppia C_1 ha sempre lo stesso segno della velocità pendolare e rappresenta quindi una coppia di smorzamento negativo, è cioè amplificatrice di oscillazioni!

Oltre a questa caratteristica essenziale la C_1 gode, nel senso spiegato or ora, delle seguenti proprietà.

1°, nulla nel caso limite in cui è nulla la resistenza, aumenta col crescere di questa, raggiungendo un massimo per la resistenza che rende

$$\varrho = 22° \, 30' \quad (\text{cioè } r = 0{,}41\, \omega L);$$

2°, è proporzionale ad E_0^2 e quindi cresce rapidamente coll'eccitazione;

3°, dipende dalla frequenza e dall'autoinduzione non soltanto in quanto queste grandezze entrano nell'espressione di ϱ ma anche perchè esse compaiono altrimenti nella formula, però in modo da contribuire sempre più al risultato che a valori maggiori di ω oppure di L corrispondono valori minori di C_1, essendo particolarmente sentita l'influenza della frequenza;

4° infine, è indipendente dalla coppia elettromagnetica principale C_0, e quindi dal carico. E poichè le grandezze che entrano nel coefficiente di smorzamento in C_1 non vengono modificate durante le oscillazioni, questo è altresì indipendente dallo spostamento angolare α.

L'espressione della coppia C_1 è stata ricavata in base all'ipotesi di piccole oscillazioni, ma se per oscillazioni di maggiore ampiezza, nei limiti di stabilità della macchina, non potrà rimanere identica la sue espressione quantitativa, è però verosimile che anche allora non varii in modo radicale il suo comportamento qualitativo, sicchè la coppia C_1 sarebbe causa che la ruota polare, una volta iniziata una benchè minima oscillazione, oltrepasserebbe in breve l'angolo limite di stabilità, rendendo inevitabile la disincronizzazione.

In vece un simile risultato è per fortuna soltanto eccezionale, inquantochè, come abbiamo già notato in altra occasione, lo stesso moto pendolare provoca anche fenomeni di smorzamento positivo, che, in contrasto alla C_1, tendono ad estinguere le oscillazioni. Così appunto il movimento relativo fra il campo d'armatura e la ruota polare induce nei poli, specialmente se massicci, e nell'avvolgimento eccitatore correnti, che per la legge di Lenz si oppongono al movimento che le ha generate, tendendo pertanto a ripristinare l'esatto sincronismo. Ma come veramente si esplichi la complessa ed importante azione smorzatrice del circuito eccitatore, la quale, non potendo mai mancare, potrebbe chiamarsi di smorzamento naturale, vogliamo ora analizzare in modo più preciso.

(Continua).

---

(1) Se $-p$ è il fattore (costante) di smorzamento, il logaritmo naturale di questo rapporto è uguale a

$$\frac{1}{4} \frac{p}{K} T^* = \frac{\pi}{2} \frac{p}{\sqrt{K C_s - \frac{1}{4} p^2}}$$

essendo

$$T^* = 2\pi \frac{K}{\sqrt{K C_s - \frac{1}{4} p^2}}$$

la durata della piccola oscillazione completa.